

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Национальный исследовательский  
Томский государственный университет  
Механико-математический факультет

---

**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ**

**Посвящается 145-летию Томского государственного  
университета и 75-летию механико-математического  
факультета**

2–5 октября, 2023 г., г. Томск

---

*Сборник материалов конференции*

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Томск – 2023

УДК 510; 51.7  
В 11

**Всероссийская конференция по математике и механике.  
В 11** Посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета: 2–5 октября, 2023 г., г. Томск : сборник материалов конференции. – Томск : STT, 2023. – 298 с.

ISBN 978-5-93629-701-4

Сборник содержит тезисы конференции, посвященной обсуждению широкого круга вопросов по проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач. Материал представлен в следующих разделах: Алгебра и математическая логика; Вычислительная математика и компьютерное моделирование; Геометрия и топология; Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Вопросы преподавания математики, механики и информатики; Современные задачи механики.

Для широкого круга научных работников: ученых, преподавателей, студентов.

**УДК 510; 51.7**

*Опубликовано в авторской редакции.*

*Конференция и издание сборника поддержаны Региональным научно-образовательным математическим центром Томского государственного университета за счет средств субсидии Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2023-943).*

ISBN 978-5-93629-701-4

© Авторы, 2023  
© Томский государственный университет, 2023  
© Оформление, макет, STT™, 2023

## **Пленарные доклады**

УДК 51-74

**ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ  
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ  
ПРИРОДНОГО, ТЕХНОГЕННОГО  
И БИОЛОГО-СОЦИАЛЬНОГО ХАРАКТЕРА**

В.А. Акимов, М.В. Бедило, И.Ю. Олтян

Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам  
гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России  
(ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) МЧС России)  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, 7, 121352

E-mail: akimov@vniigochs.ru

***Аннотация.** В докладе рассмотрены основные прогнозные и аналитические модели в области природных, техногенных и биолого-социальных угроз безопасности жизнедеятельности населению, полученные в рамках выполнения работ по созданию аппаратно-программного комплекса «Безопасный город» в 2020-2022 годах.*

***Ключевые слова.** Прогнозные и аналитические модели, природные угрозы, техногенные угрозы, биолого-социальные угрозы, безопасность жизнедеятельности, метод Байеса.*

**THEORETICAL AND PROBABILISTIC METHODS  
FOR FORECASTING EMERGENCIES OF NATURAL, MAN-MADE  
AND BIOLOGICAL AND SOCIAL CHARACTER**

V.A. Akimov, M.V. Bedilo, I.Yu. Oltyan

All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergency Situations  
of the Ministry of Emergency Situations of Russia  
Russia, Moscow, st. Davydovskaya, 7, 121352

***Annotation.** The report discusses the main predictive and analytical models in the field of natural, man-made and biological and social threats to the life safety of the population, obtained as part of the work on the creation of the Safe City hardware and software complex in 2020-2022.*

***Keywords.** Predictive and analytical models, natural hazards, man-made threats, biological and social threats, life safety, Bayesian method.*

**Введение.** В данной статье рассмотрены прогнозные и аналитические модели (ПАМ) в области природных, техногенных и биолого-социальных угроз безопасности жизнедеятельности населения с использованием метода Байеса.

**Постановка задачи.** Применить комплексный подход к прогнозированию чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера, в математическую формализацию которого положены байесовские классификаторы, основанные на принципе максимума апостериорной информации [1].

**Результаты.** Вероятностной оценке с использованием байесовского классификатора подлежат следующие параметры [2-4]:

- для ПАМ «Лесной пожар (ЛП)» - скорость верхового ЛП, площадь и скорость низового ЛП;
- для ПАМ «Землетрясение (ЗМ)» - степень повреждения здания от ЗМ, количество людей в поврежденных от ЗМ зданиях;
- для ПАМ «Наводнение (НВ)» - гидроморфологические параметры, характеризующие участки рек при НВ;
- для ПАМ «Отключение теплоснабжения» - показатели надежности теплоснабжения потребителя;
- для ПАМ «Отключение электроснабжения» - индекс приоритета восстановления электроснабжения;
- для ПАМ «Разлив нефти и нефтепродуктов (РНН)» - площадь РНН; масса вылившейся нефти;
- для ПАМ «Сброс жидких технологических отходов (ЖТО) в гидросферу» - концентрация ЖТО; снижение показателей потребления кислорода;
- для ПАМ «Выброс опасных химических веществ (ОХВ) в окружающую среду» - мощность выброса; концентрация ОХВ;
- для ПАМ «Прогнозирование последствий массовых заболеваний людей» - показатели обеспеченности ресурсами системы оказания медицинской помощи.

**Заключение.** Установлены зависимости основных прогнозных параметров в области природных, техногенных и биолого-социальных угроз безопасности жизнедеятельности населения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прогнозно-аналитические решения по природным, техногенным и биолого-социальным угрозам единой системы информационно-аналитического обеспечения безопасности среды жизнедеятельно-

- сти и общественного порядка "Безопасный город" / В. А. Акимов, А. В. Мишурный, О. В. Якимюк [и др.]. – Москва: Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2022. – 315 с. – ISBN 978-5-93970-278-2. – EDN MGXNYI.
2. Акимов, В. А. Современные методы исследования чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера / В. А. Акимов, М. В. Бедило // Материалы VI Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны. В 4-х частях, Москва, 01 марта 2022 года/ Сост. В.С. Бутко, М.В. Алешков, С.В. Подкосов, А.Г. Заворотный [и др.]. Том Часть I. – Москва: Академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, 2022. – С. 16-24. – EDN HSSYVB.
  3. Акимов, В. А. Исследование чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера современными научными методами / В. А. Акимов, М. В. Бедило, С. П. Сушев. – Москва: Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2021. – 179 с. – ISBN 978-5-93970-249-2. – EDN WUKXKC.
  4. Акимов, В. А. Математические модели прогнозирования последствий массовых заболеваний людей / В. А. Акимов, Е. О. Иванова, О. А. Дерендяева // Материалы VII Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны. В Год 90-летия со дня образования Академии ГПС МЧС России: в 5 частях, Москва, 01 марта 2023 года. Том Часть V. – Москва: Академия Государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий, 2023. – С. 227-233. – EDN TLQAQX.

УДК 512.541

**КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП  
БЕЗ КРУЧЕНИЯ: АЛГОРИТМЫ, ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ,  
МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВЯЗЬ С ТЕОРЕМОЙ  
БЭРА–КАПЛАНСКОГО**

Е.А. Благовещенская

Петербургский государственный университет путей сообщения  
императора Александра I, кафедра «Высшая математика»  
Россия, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 9, 190031

E-mail: kblag2002@yahoo.com, blagoveschenskaya@pgups.ru

***Аннотация.** Свойства абелевых группы без кручения тесно связаны с групповыми свойствами их колец эндоморфизмов. Базисом для сочетания группового и кольцевого подходов в исследовании специального класса почти вполне разложимых групп и других смежных классов является тот факт, что кольцо эндоморфизмов такой группы принадлежит тому же классу как аддитивная структура. Использование алгоритмов построения различных прямых разложений групп на неразложимые слагаемые приводит к построению неизоморфных разложений матричных колец, являющихся представлениями колец эндоморфизмов рассматриваемых групп. При определенных условиях доказывается определяемость групп некоторых классов их кольцами эндоморфизмов.*

***Ключевые слова.** Абелева группа без кручения, ранг группы, кольцо эндоморфизмов, алгоритмы распараллеливания.*

**Введение.** Все необходимые определения и вспомогательные результаты содержатся в [1]. Базисом для исследования взаимосвязей абелевых групп без кручения и их колец эндоморфизмов является тот факт, что аддитивная группа эндоморфизмов в данном случае представляет собой группу из этого же класса. Аналогичное утверждение верно и для подкласса, состоящего из почти вполне разложимых групп.

Этот класс групп  $X$  (асд-групп) является наиболее близким к классу вполне разложимых групп конечного ранга (прямых сумм групп ранга 1), так как состоит из групп, содержащих вполне разложимую вполне характеристическую подгруппу  $A$ , имеющую конечный индекс

в  $X$ , которая называется регулятором группы  $X$  и обозначается  $R(X)$ . Таким образом, почти вполне разложимые группы определяются вполне разложимой группой без кручения  $A$  и конечной (то есть, периодической) группой  $X/A$ . И периодические группы, и вполне разложимые группы без кручения кольцевого типа в своих классах определяются кольцами эндоморфизмов, что во многом определило доказательность теоремы в форме Бэра-Капланского в классе почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором.

**Постановка задачи.** Установление взаимосвязей почти вполне разложимых абелевых групп с их кольцами эндоморфизмов с использованием матричных представлений последних. При установлении соответствия между прямыми разложениями упомянутых структур предполагается разработка алгоритмов ярусно-параллельной формы для построения прямых разложений групп с заранее заданными числовыми характеристиками.

**Результаты.** Поскольку  $\text{acd}$ -группы имеют довольно сложную структуру и допускают неизоморфные прямые разложения, традиционно они исследуются с использованием понятия почти изоморфизма ( $\cong_{nr}$ ), эквивалентности, которая слабее изоморфизма ( $\cong$ ), но отражает свойства, связанные с прямыми разложениями, достаточно полно. С точностью до почти изоморфизма установлены двойственные связи  $\text{acd}$ -групп с их кольцами эндоморфизмов, которые обобщены на некоторые другие классы абелевых групп без кручения.

Выявлены свойства неизоморфных прямых разложений колец эндоморфизмов  $\text{End } X$   $\text{acd}$ -групп  $X$  с циклическим регуляторным фактором  $X/A$  и определены их числовые характеристики.

**Теорема.** Пусть  $X$  --- блочно-жесткая  $\text{acd}$ -группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором и множеством критических типов  $T$ . Пусть ее регулятор  $A = R(X)$  раскладывается в прямую сумму однородных компонент  $A_1, A_2, \dots, A_k$  рангов  $n_1, n_2, \dots, n_k$  соответственно. Если  $X$  обладает прямым разложением  $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_s$  на неразложимые слагаемые, то имеется разложение кольца  $\text{End } X = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_s$  в прямую сумму неразложимых односторонних идеалов таких, что  $L_f \cong_{nr} X_f \oplus Y_f$ , где  $Y_f$  --- вполне разложимая группа ранга  $\sum_{i: \text{rk}(X_f \cap A_i)=1} (n_i - 1)$ , при этом  $R(\text{End } X) \cong \bigoplus_{i: \text{rk}(X_f \cap A_i)=1} A_i$  для любого  $f = 1, \dots, s$ .

**Замечание.** В формулировке теоремы изоморфизм и почти изоморфизм относятся к аддитивной структуре колец, ранги которых определяются как максимальное число линейно независимых элементов.

**Заключение.** Полученные результаты имеют значение не только в



представленной формулировке теории почти вполне разложимых групп, но и в теории матричных колец, которые являются представлениями колец эндоморфизмов данных групп. При рассмотрении специальных эпиморфных образов групп из этого класса получаются структурные результаты для некоторых колец целочисленных матриц, выявляющие природу их различных неизоморфных разложений как некоммукативных структур, см. [2].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского  
научного фонда (проект № 22-21-00267)*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А. Благовещенская, А.В. Михалёв. Влияние теоремы Бэра–Капланского на развитие теории групп, колец и модулей, *Фундамент. и прикл. матем.*, **24**:1 (2022), 31–123.
2. E. Blagoveshchenskaya, L. Strüingmann, Direct decomposition theory under near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free abelian groups, *Journal of Group Theory*, Vol.20, Issue 2, 2017, p. 325-346.

УДК 514.132 + 515.162

## **КОМБИНАТОРИКА И ГЕОМЕТРИЯ МНОГОГРАННИКОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО**

А.Ю. Веснин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,  
Лаборатория динамических систем  
Россия, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4, 630090

Томский государственный университет,  
Региональный научно-образовательный математический центр  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: vesnin@math.nsc.ru

***Аннотация.** Многогранники в трехмерном гиперболическом пространстве Лобачевского определяются своим комбинаторным строением и двугранными углами однозначно, с точностью до изометрии пространства. В докладе рассматриваются обобщенные гиперболические многогранники, вершины которых могут быть конечными, идеальными или усеченными. Получены верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников, линейные по числу вершин. Будут приведены приложения полученных результатов в теории гиперболических узлов.*

***Ключевые слова.** Геометрия Лобачевского, объемы гиперболических многогранников, гиперболические узлы и зацепления.*

В докладе будет показано, как информация о комбинаторике многогранника неевклидова многогранника позволяет оценить его геометрические размеры, а именно, объем.

Получение формул объемов многогранников в трехмерном пространстве Лобачевского через двугранные углы является весьма сложной задачей, частные решения которой восходят к работам Лобачевского. Формулы объемов для многогранников некоторых комбинаторных типов получены Винбергом в работе [1].

Отдельный интерес представляет класс прямоугольных гиперболических многогранников, то есть таких, у которых все двугранные узлы равны  $\pi/2$ . Простейшим компактным прямоугольным многогранником в пространстве Лобачевского является додекаэдр. Объем прямоугольного многогранника зависит от его комбинаторного строения, и как

показывают теоремы 1 и 2, объем можно оценить через простую комбинаторную характеристику – число вершин многогранника.

**Теорема 1.** [2] Пусть  $P$  – компактный прямоугольный многогранник в пространстве Лобачевского с  $V$  вершинами. Имеют место следующие оценки для его объема.

(a) Если  $V > 80$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{5v_{tet}}{8} \cdot V - 10v_{tet}$$

(b) Если  $P$  имеет  $k$ -угольную грань, где  $k \geq 5$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{tet}}{8} \cdot V - \frac{(5k + 35)v_{tet}}{8}$$

Многогранник в пространстве Лобачевского называется идеальным, если все его вершины лежат на абсолюте пространства. Простейшим идеальным прямоугольным многогранником в пространстве Лобачевского является октаэдр.

**Теорема 2.** [2] Пусть  $P$  – идеальный прямоугольный многогранник в пространстве Лобачевского с  $V$  вершинами. Имеют место следующие оценки для его объема.

(a) Если  $V > 24$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 3v_{oct}$$

(b) Если  $P$  имеет  $k$ -угольную грань, где  $k \geq 3$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - \frac{(k + 5)v_{oct}}{4}$$

(c) Если  $P$  имеет только треугольные или четырехугольные грани, а  $V \geq 73$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - (9v_{oct} - 20v_{tet})$$

В формулировках теорем 1 и 2 были использованы две константы, которые выражаются через функцию Лобачевского

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^{\theta} \log |2 \sin(t)| dt.$$

С точностью до шести знаков они имеют следующие значения:  
 $v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941$  и  $v_{oct} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663863$ .

Теорема 2 позволяет получить оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и гиперболических узлов и зацеплений, см. [3]. В работе [4] Беллетти исследовал гипотезу о максимальном

объеме обобщенного гиперболического многогранника заданного комбинаторного типа. Напомним, что многогранник в пространстве Лобачевского называют обобщенным, если допускается, что его вершины могут быть конечными, идеальными или усеченными. В [4] было установлено, что верхняя точная грань объемов обобщенных гиперболических многогранников, имеющих один и тот же одномерный скелет  $\Gamma$ , достигается на идеальном прямоугольном многограннике, одномерный скелет которого является срединным графом для  $\Gamma$ . Из оценок, полученных в теореме 2, вытекает следующий результат.

**Теорема 3.** [3] Пусть  $\Gamma$  – 3-связный планарный граф с  $E$  ребрами, а  $P$  – обобщенный многогранник в пространстве Лобачевского для которого  $\Gamma$  является 1-скелетом. Тогда имеют место следующие оценки объемов.

(а) Если  $P$  является тетраэдром, то  $\text{vol}(P) \leq v_{\text{oct}}$ .

(б) Если  $P$  отличен от тетраэдра, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2} \cdot E - \frac{5v_{\text{oct}}}{2}.$$

(с) Если  $E > 24$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2} \cdot E - 3v_{\text{oct}}.$$

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2022-884) и гранта Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Б. Винберг, Объемы неевклидовых многогранников, Успехи матем. наук. 48:2 (1993), 17–46.
2. С.А. Александров, Н.В. Богачев, А.Ю. Веснин, А.А. Егоров, Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников, Матем. сб. 214:2 (2023), 3–22.
3. А.Ю. Веснин, А.А. Егоров, Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений, Сиб. матем. журн. 64:6 (2023) (в печати).
4. G. Belletti, The maximum volume of hyperbolic polyhedra, Trans. Amer. Math. Soc., 374 (2021), 1125–1153.

УДК 510.2+511+510.5

## ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

В.М. Зюзьков

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет

E-mail: [vmz@math.tsu.ru](mailto:vmz@math.tsu.ru)

**Аннотация.** *Рассматриваются возможности экспериментальной математики в математических исследованиях. Автор описывает собственные результаты в теории чисел, полученные с помощью системы Mathematica за последние годы.*

**Ключевые слова:** *экспериментальная математика, теория чисел, система Mathematica.*

Экспериментальная математика – это тип математического исследования, в котором вычисление используется для исследования математических структур и определения их фундаментальных свойств и закономерностей. Как и в экспериментальной науке, экспериментальная математика может быть использована для составления математических предсказаний, которые затем могут быть подтверждены или опровергнуты на основе дополнительных вычислительных экспериментов. Эти исследования должны завершаться доказательством – «золотым стандартом» математической истины.

Но математика больше чем доказательство. В прошлом данную концепцию отстаивали Дьёрдь Пойа [1], и Имре Лакатос [2], убежденные сторонники эвристических методов и квазиэмпирической природы математики. Современная экспериментальная математика возникла после появления программных систем символьных вычислений (синонимом является «система компьютерной алгебры»), например, система Mathematica с языком Wolfram [3, 4].

Современной экспериментальной математике свойственно изложение результатов, следуя Эйлеру, у которого в изложении его результатов видны все подробности самого способа работы.

Более подробно об экспериментальной математике и о системе Mathematica изложено в [5]. Приведем мнение Юрия Манина о том, что изменилось в математике с появлением компьютеров [6].

«...Появилась уникальная возможность делать физические эксперименты в ментальной реальности. Можно пробовать невероятные вещи. Точнее, невероятные нельзя, а то, что можно, Эйлер умел делать и без компьютера. Гаусс тоже умел. Но теперь то, что умели Эйлер и Гаусс, может делать любой математик, сидя за своим письменным столом. И если у него не хватает воображения, чтобы различить какие-то контуры в этой платоновской реальности, он может поэкспериментировать. ... Более того, появились люди с математическим, но компьютерно-ориентированным умом. Точнее сказать, это люди, которые были и раньше, но без компьютера им чего-то не хватало. ... Им компьютер помогает исследовать вот эту платоновскую реальность, чрезвычайно эффективно при этом».

Далее опишем некоторые результаты в теории чисел, полученные автором, используя экспериментальный подход с помощью Mathematica.

### **Вычисление сильно-составных чисел**

Положительное целое  $n$  называется сильно-составным числом, если для целых  $m < n$  выполнено  $\tau(m) < \tau(n)$ , где  $\tau(x)$  обозначает количество положительных делителей числа  $x$ . Рамануджан с помощью ручных вычислений нашел 104 первых сильно-составных числа, но пропустил одно. Современные знания о сильно-составных числах описаны в [7].

Используя результаты Рамануджана С. [8], был создан алгоритм для вычисления сильно-составных чисел. Исследование полученных автором первых 435 чисел привело к гипотезе о распределении сильно-составных чисел в целом [5, стр. 311-324]. На основании гипотезы предложен эффективный алгоритм, с помощью которого вычислены первые 1003 сильно-составные числа. Последнее полученное число  $h$  имеет 77 цифр и  $\tau(h) = 111325552\ 312320$ . При помощи математических экспериментов найдена приближенная формула  $\gamma(n)$  для оценки количества сильно-составных чисел меньших данного натурального числа  $n$ :

$$\gamma(n) \approx 1.77457 \ln n + 0.293921(\ln n)^{3/2}.$$

Эта формула определяет  $\gamma(n)$  весьма приближенно, она выдает ответ не точнее определения количества десятичных цифр. Например, получаем, что 2000-е сильно составное число приближенно имеет 128 цифр.

### Вокруг теоремы Эйлера о суммах делителей

Рассматриваются две задачи, которые решал Эйлер [1, с. 111–127]. В одной задаче подсчитывается число разбиений для натуральных чисел, решение другой задачи дает рекуррентную закономерность, связывающую суммы делителей натуральных чисел. Эйлер не имел определения формального степенного ряда и производящей функции, но, тем не менее, используя индуктивные рассуждения, получил результаты, которые впоследствии были строго доказаны другими математиками. В работе [9] показывается, как можно решить эти задачи с помощью аппарата производящих функций и вычислений в системе Mathematica. Во время решения этих задач Эйлер рассматривал две бесконечные последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots$  и  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} : 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \dots$ . Автор получил новые результаты: «замкнутую форму» для этих последовательностей и производящую функцию для последовательности  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

### Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю

Рассматриваются сравнения с числами Фибоначчи  $F(n)$  по простому нечетному модулю. В данном случае номер числа Фибоначчи может быть и отрицательный: полагаем  $F(0) = 0$  и для отрицательных индексов доопределяем числа Фибоначчи с помощью правила  $F(-n) = (-1)^{n-1}F(n)$ .

Основным содержанием работы [10] является доказательство двух теорем:

**Теорема 1.** Пусть простое  $p$  имеет вид  $5t \pm 1$ ,  $k > 0$  – натуральное число и целые числа  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  – коэффициенты многочлена  $A(x)$ . Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}.$$

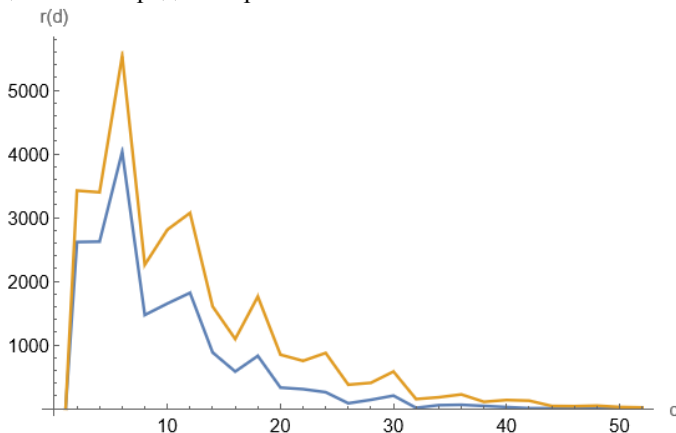
**Теорема 2.** Пусть нечетное простое  $p$  имеет вид  $5t \pm 2$ ,  $k > 0$  – натуральное число и целые числа  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  – коэффициенты многочлена  $A(x)$ . Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv (-1)^R F(S) \pmod{p}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i, R = \sum_{i=0}^k i a_i.$$

### Экспериментальное исследование динамики интервалов между последовательными простыми числами

В работе [11] экспериментально исследовалась динамика частоты  $r(d)$  появления интервала длиной  $d$  при увеличении количества рас-

смаатриваемых простых чисел. Положим  $D(m)$  – список пар чисел  $\{d, r(d)\}$ , где  $d$  пробегает все различные значения  $d_n$ , а  $r(d)$  – соответствующее количество повторений значения  $d$ , при  $n + 1 \leq m$ . Пары в  $D(m)$  упорядочены в порядке возрастания  $d$ .



На рисунке представлены сразу два графика изменения частоты. Нижний график показывает распределения частоты интервалов среди первых 3000 простых чисел. Верхний график показывает распределение частоты интервалов среди первых 30000 простых чисел. Поскольку масштабы по оси  $r$  на исходных графиках сильно различаются, то значения частоты  $r(d)$  на нижнем графике увеличено в 6 раз.

Дальнейшее исследование позволило предложить следующую гипотезу 1.

По мере увеличения количества  $m$  рассматриваемых простых чисел все числа  $d$ , кратные 6, и только они, становятся локальными максимумами (этим значениям соответствуют пики на графиках). Точнее, это означает следующее.

- 1) Если при каком-то  $m_1$  число  $d$  из списка  $D(m_1)$  является локальным максимумом и  $d$  делится на 6, то число  $d$  остается локальным максимумом в списке  $D(m)$  и при всех  $m > m_1$ .
- 2) Если же  $d$  кратно 6 и не является локальным максимумом, то оно станет таковым в списке  $D(m_2)$  при некотором  $m_2 > m$ .
- 3) Если  $d$  не кратно 6 и является локальным максимумом в списке  $D(m)$  при некотором  $m$ , то, начиная с некоторого  $m_1 > m$ ,  $d$  уже не будет локальным максимумом в  $D(m_1)$ .



Утверждение 1) теоретически можно опровергнуть с помощью вычислений. Утверждения 2) и 3) нельзя опровергнуть с помощью вычислений даже теоретически.

Дальнейшие вычисления привели к гипотезе 2: начиная с некоторого  $n_0$  и для любого  $n > n_0$ , доля количества интервалов, кратных 6, среди первых  $n$  простых чисел, составляет более  $1/3$ .

В действительности, просто доказывается следующее утверждение, более сильное, чем гипотеза 2.

*Теорема.* Среди всех интервалов между соседними простыми числами доля интервалов с длиной кратной 6 составляет половину в асимптотическом смысле.

Для доказательства теоремы о значении  $1/2$  для предела проделанные эксперименты не нужны. Нужна только догадка о формулировке теоремы. Но проделанные эксперименты имеют самостоятельную ценность. Они дополнительно показали, каким образом осуществляется предельный переход на протяжении первых 80 миллионов простых чисел. Об этом говорит гипотеза 1.

### Последовательности биномиальных коэффициентов по простому модулю

В статье [12] рассматриваются поведения бесконечных последовательностей биномиальных коэффициентов  $\binom{x}{y} \pmod p$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$

по простому модулю (выражение  $a \pmod p$  обозначает остаток от деления  $a$  на  $p$ ). В поисках закономерностей предварительно проводились математические эксперименты с помощью Wolfram Mathematica.

Наиболее общий результат:

*Теорема.* Пусть  $x \geq 1$  – целое,  $k \geq 0$  – целое,  $p$  – простое число и выполнено неравенство  $p^k \leq y < p^{k+1}$ . Тогда имеет место сравнение

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x + p^{k+1}}{y} \pmod p.$$

*Следствие.* Пусть  $p$  – простое число,  $y$  – положительное целое число, тогда последовательность

$$\binom{x}{y} \pmod p, x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

является периодической с длиной периода  $d = p^{\lfloor \log_p(y) \rfloor + 1}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. – М. : «Наука», Главная редакция физ.-мат. литературы, 1975. – 464 с.
2. Лакатос И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы*. – 2-е изд. – М. : Издательство ЛКИ, 2010. – 152 с.
3. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
4. Wagon S. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*. – Springer Science & Business Media, 2010. – 580 p.
5. Зюзьков В. М. *Эксперименты в теории чисел*. – Томск: Изд-во НТЛ, 2019. – 348 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>
6. «Троицкий вариант» № 13N (839), 30 сентября 2008 г.
7. Wolfram MathWorld: *Highly Composite Number*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/HighlyCompositeNumber.html>
8. Ramanujan S. *Highly Composite Numbers*, Proc. London Math. Soc. XIV (1915), pp. 347–409. URL: <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram15.pdf>
9. Зюзьков В. М. *Вокруг теоремы Эйлера о суммах делителей* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 51. – С. 19–32.
10. Зюзьков В. М. *Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю*. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 15–21. DOI: 10.17223/19988621/69/2.
11. Зюзьков В. М. *Экспериментальная математика и ее использование в теории чисел*. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 23–31. DOI: 10.17223/19988621/75/2.
12. Зюзьков В. М. *Последовательности биномиальных коэффициентов по простому модулю*. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. № 84 (в печати).

**Секция 1**  
**Алгебра и математическая логика**

УДК 512.5

## ПОРОЖДЕНИЕ ГРУППЫ $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ ТРЕМЯ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Р.И. Гвоздев

Сибирский федеральный университет  
Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660041

E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru

***Аннотация.** М.К. Тамбурины и П. Цукка доказали, что специальная линейная группа размерности больше 13 над кольцом целых гауссовых чисел порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Аналогичный результат для проективных специальных линейных групп размерности больше 6 установили Д.В. Левчук и Я.Н. Нужин. На момент 2022 года задача о порождении групп  $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  и  $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  тремя инволюциями оставался нерешенным только для  $n = 6$ , и  $n = 10$  в случае специальных линейных групп. В данной работе доказывается порождаемость группы  $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  тремя инволюциями.*

***Ключевые слова.** Специальная линейная группа, Кольцо целых гауссовых чисел, Порождающие тройки инволюций.*

## GENERATION OF THE GROUP $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ BY THREE INVOLUTIONS

R.I. Gvozdev

Siberian federal university  
Russia, Krasnoyarsk, Svobodny str., 79, 660041

E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru

***Abstract.** M.K. Tamburini and P. Zucca proved that a special linear group of dimension greater than 13 over the ring of Gaussian integers is generated by three involutions, two of which commute. A similar result for projective special linear groups of dimension greater than 6 was established by D.V. Levchuk and Ya.N. Nuzhin. At the time of 2022, the problem of generating the groups  $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  and  $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  by three involutions remained unsolved only for  $n = 6$ , and  $n = 10$  in the case of special linear*

groups. In this paper, we prove that the group  $SL_6(Z + iZ)$  is generated by three involutions.

**Keywords.** *Special linear group, Ring of Gaussian integers, Generating triples of involutions.*

**Введение.** Группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, мы будем называть  $(2 \times 2, 2)$  – порожденной. Очевидно, из  $(2 \times 2, 2)$  – порожденности какой-то группы следует  $(2 \times 2, 2)$  – порожденность любого её неединичного гомоморфного образа (при этом мы не исключаем, что порождающие инволюции могут совпадать). М.К. Тамбурины и П. Цукка [1] доказали  $(2 \times 2, 2)$  – порожденность некоторых классических групп над определенными  $d$  – порожденными областями целостности, в случае достаточно большой размерности  $n$ , зависящей от  $d$ . В частности, из результатов [1] следует  $(2 \times 2, 2)$  – порожденность специальной линейной группы размерности больше 13 над кольцом целых гауссовых чисел. Аналогичный результат для проективных специальных линейных групп размерности больше 6 установили Д.В. Левчук и Я.Н. Нужин [2-3]. Доказательство в [2-3] состояло в том, что порождающие указывались явно, причем в случае размерностей  $n \neq 4k + 2$  они выбирались из  $SL_n(Z + iZ)$ , то есть для таких размерностей, группа  $SL_n(Z + iZ)$  тоже  $(2 \times 2, 2)$  – порождена. Из статьи [4] следует, что группа  $SL_6(Z + iZ)$  не является  $(2 \times 2, 2)$  – порожденной, а в [5] установлено, что группы  $PSL_n(Z + iZ)$  (а, следовательно, и  $SL_n(Z + iZ)$ ) размерности  $n < 4$  не являются  $2 \times 2, 2$  – порожденными, но для групп  $PSL_2(Z + iZ)$ ,  $SL_3(Z + iZ)$ ,  $SL_4(Z + iZ)$ ,  $SL_5(Z + iZ)$ ,  $PSL_6(Z + iZ)$  найдены порождающие тройки инволюций. Таким образом, суммируя перечисленные результаты, получаем, что для любого  $n \geq 2$  группа  $PSL_n(Z + iZ)$  порождается тремя инволюциями, а в случае групп  $SL_n(Z + iZ)$  ответ неизвестен только для  $n = 6$  и  $n = 10$ .

**Результаты.** Основным результатом является следующая

**Теорема.** *Группа  $SL_6(Z + iZ)$  порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tamburini M.C., Zucca P. Generation of certain matrix group by three involutions, two of which commute // Journal of algebra. – 1997. – V. 195., № 2. – P. 650–661.

2. Levchuk D.V., Nuzhin Ya.N. On generation of the group  $PSL_n(Z + iZ)$  by three involutions, two of which commute // Журнал СФУ. Серия математика и физика. – 2008. – Т. 1., № 2. – С. 133-139.
3. Левчук Д.В. О порождаемости группы  $SL_7(Z + iZ)$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ. – 2009. – Т. 9., № 1. – С. 35-38.
4. Нужин Я.Н. Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп // Труды ИММ УрО РАН. – 2020. – Т. 26., № 3. – С. 133-141.
5. Гвоздев Р.И., Нужин Я.Н., Шаипова Т.Б. О порождении групп  $SL_n(Z + iZ)$  и  $PSL_n(Z + iZ)$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Известия ИГУ. – 2022. – Т. 40. – С. 49-62.

## ROTA-BAXTER OPERATORS ON GROUPS

V. Yu. Gubarev

Sobolev Institute of Mathematics  
Novosibirsk, Ac. Koptyuga ave. 4, 630090

Novosibirsk State University  
Novosibirsk, Pirogova str. 1, 630090

E-mail: v.gubarev8@g.nsu.ru

**Abstract.** *We give a short survey on Rota-Baxter operators on groups defined by L. Guo et. al in 2021. To the moment, a dozen of works on the subject has been written, and this direction is rapidly developing.*

Let  $G$  be a group. A map  $B: G \rightarrow G$  is called a Rota-Baxter operator (RB-operator) on  $G$  if

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1})$$

holds for all  $g, h$  from  $G$  [9].

A group endowed with a Rota-Baxter operator is called a Rota-Baxter group (RB-group). L. Guo et al. showed [9] that under the correspondence between Lie groups and Lie algebras a Rota-Baxter operator on a Lie group converts to a RB-operator on the Lie algebra [3].

Let  $G$  be a group, consider its lower central series  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , where  $G_1 = G$  and  $G_{i+1} = [G, G_i]$ . The associated graded abelian group  $L(G) = \sum_{n \geq 1} G_n / G_{n+1}$  has the structure of a Lie ring under the product  $[xG_{i+1}, yG_{j+1}] = [x, y]G_{i+j+1}$ , where  $[x, y]$  is the group commutator. In [2], it is proved that given an RB-group  $(G, B)$  such that  $B(G_n)$  is a subset of  $G_n$  for all  $n \geq 1$ , then  $R$  defined as  $R(xG_{i+1}) = B(x)G_{i+1}$  is an RB-operator on the Lie ring  $L(G)$ .

Let  $G$  be a group. Given an exact factorization  $G = HL$ , a map  $B: G \rightarrow G$  defined as follows,  $B(hl) = l^{-1}$  is an RB-operator on  $G$ .

Free Rota-Baxter group generated by a set  $X$  was built in [6].

By [9], given a Rota-Baxter group  $(G, \cdot, B)$ , the pair  $(G, \circ)$  with the product  $g \circ h = gB(g)hB(g)^{-1}$ , where  $g, h$  from  $G$ , is also a group. Moreover, in [1], it was shown that  $(G, \cdot, \circ)$  is a skew left brace [8], i.e. the group operations  $\cdot$  and  $\circ$  are connected by the relation

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c).$$

In [5], this property was extended for weak left braces.

In [1], it was proved that every skew left brace can be embedded into an RB-group. In 2023, A. Caranti and L. Stefanello clarified [4] when different RB-operators defined on a group induce the same skew left brace.

In [7], M. Goncharov defined an RB-operator on a cocommutative Hopf algebra generalizing both notions: Rota-Baxter operator on a Lie algebra and Rota-Baxter operator on a group.

*The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10005, <https://rscf.ru/project/23-71-10005/>.*

## REFERENCES

1. Bardakov, V. G., Gubarev, V. (2022). Rota–Baxter groups, skew left braces, and the Yang-Baxter equation. *J. Algebra*, vol.596, pp.328–351.
2. Bardakov, V. G., Gubarev, V. (2023). Rota—Baxter operators on groups. *Proc. Indian Acad. Sci.: Math. Sci.*, no. 1, vol. 133 (2023), article No. 4.
3. Baxter, G. (1960). An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. *Pacific J. Math.*, vol. 10, pp. 731–742.
4. Caranti, A., Stefanello, L. (2023). Skew braces from Rota–Baxter operators: a cohomological characterisation and some examples. *Ann. di Mat.*, vol. 202, pp. 1–13.
5. Catino F., Mazzotta, M., Stefanelli, P. (2023). Rota-Baxter operators on Clifford semigroups and the Yang-Baxter equation. *J. Algebra*, vol. 622, pp. 587–613.
6. Gao, X., Guo, L., Liu, Y., Zhu, Z.-C. (2023). Operated groups, differential groups and Rota-Baxter groups with an emphasis on the free objects. *Commun. Algebra*, doi: 10.1080/00927872.2023.2212775.
7. Goncharov, M. (2021). Rota-Baxter operators on cocommutative Hopf algebras. *J. Algebra*, vol. 582, pp. 39–56.
8. Guarnieri L. & Vendramin, L. (2017). Skew braces and the Yang-Baxter equation. *Math. Comp.*, vol. 86, pp. 2519–2534.
9. Guo, L., Lang, H., Sheng, Yu. (2021). Integration and geometrization of Rota—Baxter Lie algebras. *Adv. Math.*, vol. 387, article 107834.



УДК 512.543

## СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА $K_p$ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

А. И. Забарина, Е.А. Фомина

Томский государственный педагогический университет,  
кафедра математики, теории и методики обучения математике,  
физико-математический факультет  
Россия, г. Томск, ул. Киевская, 60, 634061

E-mail: aizabarina@gmail.com

***Аннотация.** Исследованы свойства множества  $K_p$ , состоящего из элементов неабелевой группы, коммутирующих ровно с  $p$  элементами группы  $G$ . В частности, доказан критерий множества  $K_2$ .*

***Ключевые слова.** Группа, централизатор элемента, инволюция, силовские подгруппы.*

## PROPERTIES OF THE $K_p$ SET IN FINITE GROUPS

A.I. Zabarina, E.A. Fomina

Tomsk State Pedagogical University  
Russia, Tomsk, Kievskaya str., 60, 634061

***Abstract.** The properties of a set  $K_p$  consisting of elements of a non-Abelian group commuting exactly with  $p$  elements of group  $G$  are investigated. In particular, the criterion of the  $K_2$  set is proved.*

***Keywords:** group, centralizer of an element, involution, Sylow subgroups.*

В [1-3] изучались некоторые свойства конечных групп, в которых существуют элементы порядка  $p$ , порядок централизатора которых равен порядку элемента. Множества таких элементов мы обозначаем  $K_p$ , где  $p$  – произвольное простое число.

Имеют место следующие результаты о множествах  $K_p$  в конечных группах. [1-4]

1. Пусть  $|G| = n$ . Тогда, если  $K_p$  не пусто, то  $n$  делится на  $p$  и не делится на  $p^2$ .
2. Множество  $K_p$  является инвариантным подмножеством  $G$ .

3. Пусть  $|G| = n$ . Тогда  $|K_p| \in \left\{ 0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \dots, \frac{(p-1)n}{p} \right\}$ .
4. Пусть  $G$  – неабелева группа с тривиальным центром  $Z(G) = \{e\}$ ,  $|G| = p_1 p_2 \dots p_k$ ,  $k \geq 3$ ,  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ . Тогда, если  $a \in K_{p_i}$ , то  $i \in \{1, k\}$ .
5. Пусть  $G$  – неабелева группа,  $|G| = p^2 q$ ,  $p$  и  $q$  – простые числа,  $Z(G) = e$ . Так как  $|G| : p^2$ , то согласно свойству 1,  $K_p = \emptyset$ . Для множества  $K_q$  возможны два случая:
- если  $p > q$ , то  $|K_q| = p^2(q-1)$ ;
  - если  $p < q$ , то  $|K_q|$  зависит от того, какая из силовских подгрупп  $H_q$  или  $H_{p^2}$  группы  $G$  является её нормальным делителем.
- В первом случае  $|K_q| = q-1$ . Во втором –  $|K_q| = p^2(q-1)$ .

Известно, что исследование свойств централизатора инволюций сыграло важную роль при доказательстве классификационной теоремы конечных простых групп [5].

Критерий множества  $K_2$  также использует свойства множества инволюций группы  $G$ .

**Критерий  $K_2$ .** Пусть  $G$  – конечная группа, содержащая множество инволюций  $J$ . Тогда:

$$J = K_2 \Leftrightarrow J \cdot J \subset (G \setminus J) \wedge (G \setminus J) < G.$$

Доказательство критерия опирается на следующие свойства  $K_2$ :

1.  $K_2 \subset J$ ;
2. Если  $i_1, i_2 \in K_2$ , то  $i_1 i_2 \notin K_2$ ;
3. Если  $K_2 \neq \emptyset$ , то
  - a)  $K_2 = \frac{|G|}{2}$ ;
  - b)  $\forall a \in G \setminus J \quad \forall u^* \in K_2 \quad \exists u', u'' \in K_2 \quad (a = u^* u' = u'' u^*)$ ;
  - c)  $K_2 = J$ ;
  - d)  $|G| = 4q + 2$ ;
  - e)  $(G \setminus K_2) = (G \setminus J) < G$ .

В [4] показано, что в трехмерной проективной специальной линейной группе  $PSL_3(4)$  (обозначение взято из [5]) множество  $K_5$  не пусто, в отличие от другой простой группы  $A_8$  того же порядка.

Для множества  $K_5$  доказан следующий результат.

**Предложение.** Пусть  $G$  – конечная простая группа,  $k \in K_5$ ,  $A = \langle k \rangle$ . Тогда  $|N_G(A)| \div 2$  и каждая инволюция из  $N_G(A)$  инвертирует каждый элемент из  $A$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А. О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 6(38). – С. 27-32.
2. Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве  $K_3(G)$  элементов конечных групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 5-11.
3. Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве  $K_p$  в конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 68. – С. 33-40.
4. Забарина А.И., Фомина Е.А. Множество  $K_p$  в некоторых конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 81. – С. 5-13.
5. Горенштейн Д. Конечные простые группы: введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

УДК 515.124.6

## О МЕТРИЗУЕМОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

К.Л. Козлов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
г. Москва

E-mail: kkozlov@gmail.com

***Аннотация.** Исследуется метризуемость факторпространств подгрупп полных по Чеху групп.*

***Ключевые слова.** Метризуемость, полная по Чеху группа, факторпространство топологической группы.*

**Введение.** Наиболее общие результаты о метризуемости однородных пространств счетного характера, являющихся факторпространствами топологических групп, следующие.

При наложении ограничений на подгруппу:

(а) факторпространство  $G/H$  счетного характера топологической группы  $G$  по равномерной подгруппе  $H$ , метризуемо [1 - 3].

При наложении ограничений на группу:

(б) факторпространство  $G/H$  полной по Чеху группы  $G$  по замкнутой  $G_\delta$  подгруппе  $H$  метризуемо [4];

(в) факторпространство  $G/H$  счетного характера  $\omega$ -уравновешенной группы  $G$  по замкнутой подгруппе  $H$  метризуемо [5].

**Постановка задачи.** Обобщение результатов (б) и (в): однородное пространство счетного характера, являющееся факторпространством подгруппы произведения полных по Чеху групп, метризуемо.

**Результаты. Теорема.** Пусть  $(G, X, \alpha)$   $G$ -пространство с  $d$ -открытым действием  $\alpha$  подгруппы  $G$  произведения полных по Чеху групп. Если  $X$  счетного характера и  $|X/G|$  (количество орбит действия) счетно, то  $X$  метризуемо.

**Следствие.** Пусть  $G$  подгруппа произведения полных по Чеху групп,  $H$  замкнутая подгруппа  $G$ . Тогда факторпространство  $G/H$  метризуемо в том и только в том случае, если характер  $G/H$  счетен.

**Следствие.** Если факторпространство  $G/H$  неметризуемо и счетного характера, то группа  $G$  не может быть подгруппой произведения полных по Чеху групп.

**Заключение.** Устанавливается метризуемость факторпространств счетного характера подгрупп произведения полных по Чеху групп.

### ЛИТЕРАТУРА

1. W. Roelcke, S. Dierolf. Uniform structures on topological groups and their quotients. – Advanced Book Programm, McGraw-Hill International Book Co., New-York, 1981. – 276 p.
2. К.Л. Козлов, В.А. Чатырко. Топологические группы преобразований и компакты Дугунджи // Математический сборник. – 2010. – Т. 201, № 1. - 103-128.
3. M. Fernández, I. Sánchez, M. Tkachenko. Coset spaces and cardinal invariants. // Acta Mathematica Hungarica. – 2019. – v. 159. – 486-502.
4. L.G.Brown. Topologically complete groups. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – v. 35 (2). – 593-600.
5. A. Karashev, K.L. Kozlov, Admissible topologies for groups of homeomorphisms and substitutions of groups of  $G$ -spaces. // Topol. Appl. – 2020. – v. 275. – 107033.

УДК 512.554

## КОНЕЧНЫЕ КВАЗИПОЛЯ ХОЛЛА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

О.В. Кравцова, В.С. Логинова

Сибирский федеральный университет  
Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660041

E-mail: ol71@bk.ru

**Аннотация.** В 1943 году М. Холл выделил первые примеры квазиполей, не являющихся ни полуполями, ни почти-полями, – квазиполя Холла. Квазиполе размерности 2 над центром  $GF(q)$ , каждый нецентральный элемент которого является корнем фиксированного неприводимого над  $GF(q)$  квадратичного многочлена, называется квазиполем Холла. Обсуждаются структурные вопросы В.М. Левчука о подполях, спектрах и автоморфизмах, вопрос Г. Венэ о правопримитивности. Увеличение размерности в определении квазиполя Холла приводит к примерам квазиполей, допускающих покрытие полями.

**Ключевые слова.** Квазиполе Холла, автоморфизм, спектр, правопримитивность.

**Введение.** С начала прошлого века взаимосвязанно изучаются плоскости трансляций и координатизирующие их квазиполя. К понятию квазиполя приходят, исключив в списке аксиом тела ассоциативность умножения и один из дистрибутивных законов. Первые нетривиальные примеры полуполей (дистрибутивных квазиполей) и почти-полей (ассоциативных квазиполей) были представлены Л. Диксоном в 1905–1906 гг. Строение даже известных конечных квазиполей изучено мало, как показывает обзор 2007 г. [1]. Первые примеры конечных квазиполей, не являющихся ни полуполями, ни почти-полями, построил М. Холл в 1943 г. Квазиполе  $Q$  порядка  $q^2$  ( $q = p^n$ ,  $p$  – простое число), двумерное над центром  $K \cong GF(q)$ , называется квазиполем Холла, если все нецентральные элементы являются корнями одного неприводимого квадратичного многочлена  $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$ .

**Постановка задачи.** Следующие вопросы строения конечных полуполей и квазиполей исследовались в различных ситуациях уже давно и записаны В.М. Левчуком в [2].

(А) Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.

**(В)** Выявить конечные квазиполя  $Q$  с неоднородной лупой  $Q^*$ .

**(С)** Выявить, какие возможны спектры лупы  $Q^*$  конечного полуполя и квазиполя  $Q$ .

**(D)** Найти порядок группы автоморфизмов.

В работе исследуются перечисленные вопросы для конечных квазиполей Холла. Правоупорядоченная и левоупорядоченная степень элемента квазиполя определяются индуктивно:  $a^{(1)} = a^{(1)} = a$ ,  $a^{(n+1)} = a^{(n)} \cdot a$ ,  $a^{(n+1)} = a \cdot a^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $n$ -й степенью называем любое произведение  $n$  множителей, равных  $a$ . Аналогично теоретико-групповым понятиям, вводятся порядок элемента, его левый и правый порядки, спектр мультипликативной лупы  $Q^*$  ненулевых элементов, ее левый и правый спектры.

**Результаты.** Для квазиполя Холла  $Q$  обозначим  $P(r, s)$  его минимальное подполе в  $K$ , содержащее  $r, s$ .

**Предложение 1.** Центр  $K$  конечного квазиполя Холла  $Q$  является единственным его максимальным подполем, за исключением случая  $K \cong GF(2^{2m+1})$ ,  $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ , когда  $Q$  есть объединение  $K$  и подполей порядка 4.

**Предложение 2.** Правый спектр квазиполя Холла  $Q$  равен  $M \cup \{m\}$ , где  $M$  – множество всех делителей числа  $q - 1$ ,  $m$  – делитель числа  $q^2 - 1$ , не делящий  $q - 1$ . Левый порядок любого нецентрального элемента равен трем при  $r = 0$ , четырем при  $r = s$  и больше четырех в остальных случаях.

Если лупу  $Q^*$  исчерпывают правоупорядоченные степени одного элемента, то  $Q$  и  $Q^*$  называют правопримитивными. Результаты М. Кордеро и В. Джа [3] о примитивности уточнены и дополнены контрпримерами.

**Предложение 3.** Квазиполе Холла  $Q$  является правопримитивным тогда и только тогда, когда  $P(r, s) = K$  и  $\varphi(x)$  – примитивный неприводимый многочлен над  $K$ .

Известный результат о транзитивности на нецентральных элементах группы  $Aut_K Q$  автоморфизмов  $Q$ , фиксирующих каждый элемент из центра, дополнен матричным представлением всех автоморфизмов квазиполя Холла.

Меняя в определении степень многочлена либо размерность квазиполя, мы получим квазиполя, свойства которых еще предстоит описать. П.К. Штуккерт в [5] показано, что существуют три квазиполя порядка 16, каждое из которых есть теоретико-множественное объединение семи максимальных подполей порядка 4. Эти квазиполя не яв-

ляются квазиполями Холла, так как имеют размерность 4 над центром  $Z_2$ , хотя все их нецентральные элементы являются корнями одного многочлена  $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ . Более того, доказано, что эти квазиполя не содержатся ни в одном квазиполе Холла.

**Заключение.** Несмотря на то, что квазиполя Холла давно известны и хорошо изучены, некоторые вопросы строения заслуживают внимательного рассмотрения. Простор для исследования открывают возможности обобщения квазиполей Холла.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson N.L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. – London New York, Chapman Hall/CRC, 2007. – 888 p.
2. Levchuk V.M., Kravtsova O.V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 4. – P. 688–698.
3. Cordero M., Jha V. On the multiplicative structure of quasifields and semifields: cyclic and acyclic loops // Note di Matematica. – 2009. – Vol. 29, no. 1. – P. 45–59.
4. Levchuk V.M., Shtukkert P.K. Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // J. of Siberian Federal University. Ser. Mathematics & Physics. – 2014. – Vol. 7, no. 3. – P. 362–372.



УДК 512.552

## КОЛЬЦА ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ ВЫЧЕТОВ

Ц.Д. Норбосамбуев

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: nstsdts@yandex.ru

***Аннотация.** Кольца формальных матриц (далее – КФМ) над кольцами вычетов – показательный, содержательный и, вместе с тем, достаточно просто устроенный пример КФМ. В этом докладе мы приведем некоторые их свойства.*

***Ключевые слова.** Кольцо, формальная матрица, обобщенная матрица, кольцо контекста Мориты.*

**Введение.** Все кольца – ассоциативные с единицей,  $U(R)$ ,  $Idem(R)$ ,  $Nil(R)$  – группа обратимых элементов, множество идемпотентов и множество нильпотентов кольца  $R$ ,  $E(G)$  – кольцо эндоморфизмов абелевой группы  $G$ ,  $\mathbf{Z}$  – кольцо (и группа) целых чисел,  $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$  – кольцо (и группа) вычетов по модулю  $p^n$ .

**Постановка задачи.** Пусть  $p$  – простое,  $m > n > 0$ , рассмотрим КФМ

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{с произведением: } A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как показали Крылов и Туганбаев [1]  $K$  изоморфно  $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ . Эндоморфизму  $\theta$  группы  $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$  соответ-

существует единственная формальная матрица  $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ ,

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ , такая, что для всяких  $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$  выполнено  $\theta(z_1 + p^m \mathbf{Z}, z_2 + p^n \mathbf{Z}) = (az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m \mathbf{Z}, cz_1 + dz_2 + p^n \mathbf{Z})$ . Ранее Бергман [2] доказал, что  $E((\mathbf{Z}/p^2 \mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p \mathbf{Z}))$  нельзя вложить в кольцо «обычных» матриц ни над каким коммутативным кольцом.

Крылов [3] обобщил понятие определителя на случай произвольных формальных матриц и формальных матриц из  $K$ . Степанова и Тимошенко, пользуясь этим, смогли найти условия обратимости в  $K$  [4].

Именно, матрица  $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$  обратима тогда и только

тогда, когда числа  $a$  и  $d$  не делятся  $p$ .

Напомним, что кольцо  $R$  называется *2-хорошим*, если всякий его элемент есть сумма двух обратимых, *изящным*, если любой ненулевой элемент – сумма нильпотентного и обратимого, *ниль-чистым*, если всякий элемент – сумма идемпотента и нильпотента, *ниль-хорошим*, если любой элемент – сумма нильпотентного и обратимого или нулевого. Подробнее об аддитивных задачах можно прочитать, например, в [5].

**Результаты. Теорема 1[6].** При  $p > 2$ ,  $K$  – 2-хорошее кольцо, а при  $p = 2$   $K$  не является хорошим, то есть в  $K$  найдутся матрицы, непредставимые в виде сумм конечного числа обратимых матриц.

Получаем интересную ситуацию:  $\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$  –  $\omega$ -хорошее кольцо,  $M(2, \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z})$  – 2-хорошее, а  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/2^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$  – не хорошее.

**Теорема 2[7].** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ . Матрица  $A$

нильпотентна тогда и только тогда, когда числа  $a$  и  $d$  кратны  $p$ .

**Следствие 3[7].** В  $K$  есть матрицы непредставимые в виде суммы нильпотентной и обратимой или нулевой, то есть  $K$  – не ниль-хорошее кольцо.

**Следствие 4[7].** Поскольку  $K$  – не ниль-хорошее кольцо, то оно не будет и изящным.

**Теорема 5[7].** Матрица  $A$  – нетривиальный идемпотент в  $K$  тогда и только тогда, когда

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\mu} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sum_{k=1}^{\nu} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{\mu} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sum_{k=1}^{\nu} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \text{ где } C_i \text{ – числа}$$

Каталана,  $\mu = \left[ \frac{m-1}{m-n} \right]$  и  $\nu = \left[ \frac{n-1}{m-n} \right]$ .

**Следствие 6[7].**  $K - (p-1)$ -иль-чистое кольцо.

**Следствие 7[7].** Если  $p > 2$ , то  $K$  – не иль-чистое кольцо.

**Следствие 8[7].**  $K$  – иль-хорошее чистое кольцо.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. – 2014. – № 1(19). – С. 65–119.
2. Bergman G.M. Some examples in PI ring theory // Israel Journal of Mathematics. – 1974. – Vol. 18. – P. 257–277.
3. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – № 5(20). – С. 95–112.
4. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 74. – С. 30–42.
5. Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О  $k$ -иль-хороших кольцах формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 77. – С. 17–26.

6. Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. [В печати].
7. Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Формальные матрицы над кольцами вычетов, близкие к хорошим // [Готовится к печати в] Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика.

УДК 512.54

**О ЗАМКНУТОСТИ КОВРОВ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП,  
АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРУППАМИ ШЕВАЛЛЕ,  
НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ**

Я.Н. Нужин

Сибирский федеральный университет  
Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660041

E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

***Аннотация.** Установлено достаточное условие замкнутости ковра аддитивных подгрупп  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  типа  $\Phi$  над произвольным коммутативным кольцом  $K$  и, тем самым, получен положительный ответ на вопрос 19.63 из Коуровской тетради и подтверждена одна гипотеза В. М. Левчука при условии, что тип  $\Phi$  отличен от  $C_l$ ,  $l \geq 4$ , когда характеристика кольца  $K$  есть 0 или  $2m$  для некоторого натурального числа  $m > 1$ . Также, получен частичный ответ на вопрос 19.62.*

***Ключевые слова.** Группа Шевалле, коммутативное кольцо, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа.*

**ON THE CLOSEDNESS OF CARPETS OF ADDITIVE  
SUBGROUPS, ASSOCIATED WITH CHEVALLEY GROUPS  
OVER COMMUTATIVE RINGS**

Ya.N. Nuzhin

Siberian Federal University  
Russia, Krasnoyarsk, Svobodny Ave., 79, 660041

E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

***Annotation.** It is established a sufficient condition for the closedness of the carpet of additive subgroups  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  of type  $\Phi$  over an arbitrary commutative ring  $K$ . As a corollary, we obtain a positive answer to question 19.63 from the Kourovka notebook and a confirmation one Levchuk's hypothesis, provided that the type  $\Phi$  is different from  $C_l$ ,  $l \geq 4$ , when the characteristic of the ring  $K$  is 0 or  $2m$  for some natural number  $m > 1$ . Also, a partial answer to question 19.62 is given.*

**Keywords.** Chevalley group, commutative ring, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

**Введение.** Далее  $\Phi$  – приведенная неразложимая система корней,  $E(\Phi, K)$  – элементарная группа Шевалле типа  $\Phi$  над коммутативным кольцом  $K$ . Группа  $E(\Phi, K)$  порождается своими корневыми подгруппами  $x_r(K) = \{x_r(t) | t \in K\}$ ,  $r \in \Phi$ . Подгруппы  $x_r(K)$  абелевы и для каждого  $r \in \Phi$  и любых  $t, u \in K$  справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t + u). \quad (1)$$

Назовем *ковром типа  $\Phi$  над  $K$*  всякий набор аддитивных подгрупп  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  кольца  $K$  с условием

$$C_{ij,rs}A_r^i A_s^j \subseteq A_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir + js \in \Phi, i > 0, j > 0, \quad (2)$$

где  $A_r^i = \{a^i | a \in A_r\}$ , а константы  $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  определяют коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \text{ } r, s, ir + js \in \Phi. \quad (3)$$

Всякий ковер  $A$  типа  $\Phi$  над  $K$  определяет *ковровую* подгруппу  $E(\Phi, A) = \langle x_r(A_r) | r \in \Phi \rangle$  группы  $E(\Phi, K)$ , где  $\langle M \rangle$  – подгруппа, порожденная множеством  $M$ . Ковер  $A$  называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа  $E(\Phi, A)$  не имеет новых корневых элементов, то есть если  $E(\Phi, A) \cap x_r(K) = x_r(A_r)$ ,  $r \in \Phi$ .

Данное определение ковра ввел В. М. Левчук и оно впервые было записано в следующем вопросе из Коуровской тетради [1].

**Вопрос А).** *Какие условия на ковер  $A$  (в терминах  $A_r$ ) над коммутативным кольцом  $K$  необходимы и достаточны для того, чтобы ковер  $A$  был замкнутым?* [1, вопрос 7.28, 1980 г.]

**Гипотеза Б).** *Включений  $A_r A_{-r} A_r \subseteq A$ ,  $r \in \Phi$ , достаточно для замкнутости ковра аддитивных подгрупп  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  над коммутативным кольцом  $K$ .* [2, стр. 523, 1982 г.]

Следующий вопрос автора данной заметки является усилением гипотезы Б), а для нечетной характеристики основного кольца коэффициентов  $K$  они эквивалентны.

**Вопрос В).** *Являются ли включения  $A_r^2 A_{-r} \subseteq A$ ,  $r \in \Phi$ , достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  над коммутативным кольцом  $K$ ?* [1, вопрос 19.63, 2018 г.]

По элементарному ковра  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  типа  $\Phi$  ранга  $l \geq 2$  определим набор аддитивных подгрупп  $B_q = \sum C_{ij,rs} A_r^i A_s^j$ ,  $q \in \Phi$ , где

суммирование ведется по всем натуральным числам  $i, j$  и корням  $r, s \in \Phi$ , для которых  $ir + js = q$ . Набор  $B = \{B_q | q \in \Phi\}$  является ковром, и он называется *производным* от  $A$  [3]. Известно, что для  $\Phi$  типа  $A_l$  ковер  $B$  является замкнутым [4].

**Вопрос Г).** Будет ли любой производный ковер  $B = \{B_q | q \in \Phi\}$  над коммутативным кольцом  $K$  замкнутым? [1, вопрос 19.62, 2018 г.]

**Результаты.** Основным результатом является

**Теорема 1.** Включения  $A_r^2 A_{-r} \subseteq A_r$ ,  $r \in \Phi$ , являются достаточными для замкнутости ковra аддитивных подгрупп  $A = \{A_r | r \in \Phi\}$  над коммутативным кольцом  $K$  при условии, что тип  $\Phi$  отличен от  $C_l$ ,  $l \geq 4$ , когда характеристика кольца  $K$  есть 0 или  $2t$  для некоторого натурального числа  $t > 1$ .

**Следствие 1.** Гипотеза Б) справедлива при условии, что тип  $\Phi$  отличен от  $C_l$ ,  $l \geq 4$ , когда характеристика кольца  $K$  есть 0 или  $2t$  для некоторого натурального числа  $t > 1$ .

**Следствие 2.** Производный ковер  $B = \{B_q | q \in \Phi\}$  над коммутативным кольцом  $K$  характеристики  $p$  замкнут, если  $\text{НОД}(p, 2) = 1$ , когда  $\Phi$  типа  $B_l$ ,  $C_l$  или  $F_4$ , и если  $\text{НОД}(p, 6) = 1$  для  $\Phi$  типа  $G_2$ .

*Работа поддержана РНФ, проект 22-21-00733.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory. / Eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022. – 246 p.
2. Левчук В.М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, № 4. – С. 509–525.
3. Нужин Я.Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирского федерального университета. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 527–535.
4. Койбаев В.А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавказский матем. журн. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 39–43.

УДК 512.554

## ON RADICALS OF NOVIKOV ALGEBRAS

A.S. Panasenko

Sobolev Institute of Mathematics  
Russia, Novosibirsk, Koptyuga Avenue, 4, 630090

E-mail: a.panasenko@g.nsu.ru

**Abstract.** *We show that in a prime nonassociative Novikov algebra every nonzero ideal is non-associative. We prove that Baer (and Andrunakievich) radical and the largest left quasiregular ideal coincide in finite dimensional Novikov algebras over a field of characteristic 0 or algebraically closed field of odd characteristic. We show non-existence of right quasiregular radical in finite dimensional Novikov algebras.*

**Keywords:** *Novikov algebra, Andrunakievich radical, quasiregular radical, Baer radical.*

**Introduction.** The structure theory of any variety of algebras is strongly related to the theory of radicals that exist in this variety [1]. For example, in alternative algebras there are many useful radicals well known from the associative case: the Jacobson, Baer, Köthe, Levitsky, Andrunakievich radicals. In Jordan algebras the situation is slightly different: the quasiregular radical does not have such a good characterization as in the associative case, and the existence of the Baer radical has been an open question for more than half a century. However, in Jordan algebras there are a lot of other radicals (Andrunakievich, Köthe, Levitsky), as well as the McCrimmon radical, which is specific for the Jordan case.

**Definition 1.** (see [2]). An algebra  $A$  over a field is called a *Novikov algebra* if the following identities hold:

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz),$$

$$(xy)z = (xz)y.$$

In recent years, an active study of the structure and combinatorial theories of Novikov algebras has resumed. In the article [3] I.P. Shestakov and Z. Zhang proved that the following three properties are equivalent for the Novikov algebra  $A$ :  $A$  is solvable,  $A$  is right-nilpotent, and  $A^2$  is nilpotent. In addition, in this paper it is shown that the minimal ideal of the Novikov algebra is either simple or has zero multiplication. In the paper [4] the au-



thor shows that every ideal in a prime Novikov algebra is a prime Novikov algebra. A similar statement was proved for semiprime algebras, which made it possible to assert the existence of a Baer radical (in the sense of Kurosh) in the variety of Novikov algebras.

**Definition 2.** An element  $x \in A$  is called *left quasiregular* if there exists  $y \in A$  such that  $x + y = yx$ . An element  $x \in A$  is called *right quasiregular* if there exists  $y \in A$  such that  $x + y = xy$ . An element is called *quasiregular* if there exists  $y \in A$  such that  $x + y = xy = yx$ . An algebra is called *quasiregular* (*right quasiregular*, *left quasiregular*) if all its elements are quasiregular (right quasiregular, left quasiregular).

**Results.** We study radicals in Novikov algebras (especially in finite dimensional ones). We proved the following theorems.

**Theorem 1.** In a finite dimensional Novikov algebra, the Baer radical coincides with the Andrunakievich radical.

**Theorem 2.** Let  $F$  be a field of characteristic 0 or an algebraically closed field of characteristic  $p > 2$ . A finite dimensional Novikov algebra over the field  $F$  is left quasiregular if and only if it is solvable.

Also we proved the same construction for Andrunakievich radical in Novikov algebras as the famous construction for associative and alternative algebras.

**Theorem 3.** The Andrunakievich radical  $And(A)$  of the Novikov algebra  $A$  is hereditary. Moreover, the quotient algebra  $A/And(A)$  is a subdirect product of subdirectly irreducible algebras with an idempotent heart.

The following example is well-known and we can use it to show that some properties does not have radical properties.

**Example 1.** Consider the two-dimensional Novikov algebra  $A = Fa + Fb$  with multiplication  $a^2 = b^2 = ba = 0$ ,  $ab = b$ , [5]. It is easy to see that the spaces  $Fa$  and  $Fb$  are quasiregular. However, it is directly verified that the element  $a + b$  is not right quasiregular. Thus, the largest quasiregular (right quasiregular) ideal in  $A$  is  $Fb$ . In particular, a solvable radical need not be quasiregular or right quasiregular in finite dimensional Novikov algebras. Since an algebra with zero multiplication is obviously quasiregular, the property of quasiregularity (right quasiregularity) is not radical in the class of finite dimensional Novikov algebras, namely, the following property does not hold: if an ideal  $I$  and quotient algebra  $A/I$  are radical, then  $A$  is radical.

**Conclusion.** We prove that the Andrunakievich and Baer radicals coincide with each other and with the largest solvable ideal in the finite-dimensional Novikov algebra. Moreover, in the case of a field of characteristic 0 or an algebraically closed field of odd characteristic, the left

quasiregular radical also coincides with the Baer radical. Also we show that quasiregularity and right quasiregularity are not radical properties in Novikov algebras.

## REFERENCES

1. K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov. Rings that are nearly associative. Academic press, New York, 1982.
2. J.M. Osborn. Novikov algebras. Nova Journal of Algebra and Geometry, 1, 1992, 1-14.
3. I.P. Shestakov, Z. Zhang. Solvability and Nilpotency of Novikov Algebras. Comm. in algebra, 48:5, 2020, 1-9.
4. A.S. Panasenko. Semiprime Novikov algebras. Int. Journal of Algebra and Computation, 32:7, 2022, 1369--1378.
5. E.I. Zelmanov. A class of local translation-invariant Lie algebras. Sov.Math.Dokl., 35, 1987, 216--218.

УДК 512.548.7

## **ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ КОНЕЧНЫХ КВАЗИГРУПП**

А.Е. Панкратьев, А.В. Галатенко

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Россия, г. Москва, Ленинские горы, д.1, 119991

E-mail: anton.pankratiev@intsys.msu.ru

***Аннотация.** Рассматриваются две конструкции, позволяющие эффективно по памяти задавать квазигруппы большого порядка: правильные семейства функций и ортоморфизмы на основе обобщенных регистров сдвига с обратной связью.*

***Ключевые слова.** Квазигруппа, правильное семейство функций, ортоморфизм, регистр сдвига с обратной связью.*

## **FUNCTIONAL SPECIFICATION OF FINITE QUASIGROUPS**

A.E. Pankratiev, A.V. Galatenko

Lomonosov Moscow State University  
Russia, Moscow, Leninskie Gory, 1, 119991

E-mail: anton.pankratiev@intsys.msu.ru

***Abstract.** We consider two constructions that allow one to specify large quasigroups in a memory-efficient way, namely, proper families of functions and orthomorphisms based on generalized feedback shift registers.*

***Keywords.** quasigroup, proper family of functions, orthomorphism, feedback shift register.*

**Введение.** Конечные квазигруппы являются перспективной платформой для реализации различных криптографических примитивов [1]. В ряде алгоритмов возникают квазигруппы большого порядка, таблицы Кэли которых не помещаются в память [2]. Возможный выход из положения – переход от табличного задания к функциональному. В работе рассматриваются две конструкции, позволяющие эффективно по памяти задавать квазигруппы большого порядка: правильные семейства функций и ортоморфизмы на основе обобщенных регистров сдвига с обратной связью. Все объекты предполагаются конечными.

**Основные определения.** Квазигруппой называется множество с введенной на нем бинарной операцией, обратимой по каждому аргументу.

Семейство  $F = (f_1, \dots, f_n)$  функций  $k$ -значной логики от  $n$  переменных называется правильным, если для любых различных наборов  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  и  $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$  найдется индекс  $i$  такой, что  $x'_i \neq x''_i$  и  $f_i(x') = f_i(x'')$ .

Пусть  $(G, +)$  — абелева группа. Ортоморфизмом (полной перестановкой) называется перестановка  $s$  на множестве  $G$  такая, что  $s(x) - x$  также является перестановкой. В этом случае операция  $f(x, y) = s(x - y) + y$  задает квазигруппу на множестве  $G$  [3].

Обобщенным регистром сдвига с обратной связью называется вектор-функция  $H(x) = (h_1, \dots, h_n)$  на множестве  $G^n$  такая, что  $h_1 = x_2 + c_1, \dots, h_{n-1} = x_n + c_{n-1}, h_n = x_1 + g(x_2, \dots, x_n) + c_n$  (легко видеть, что  $H$  является перестановкой на  $G^n$ ). Это понятие обобщает ряд конструкций, предложенных Марковским и Милевой для квазигруппового представления шифров [4].

**Результаты.** Введем на множестве  $G^n$  бинарную операцию  $H(x) = (h_1, \dots, h_n)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 + f_1(p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)) \\ z_2 &= x_2 + y_2 + f_2(p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)) \\ &\vdots \\ z_n &= x_n + y_n + f_n(p_1(x_1, y_1), \dots, p_n(x_n, y_n)) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p_1, \dots, p_n: G^2 \rightarrow G, f_1, \dots, f_n: G^n \rightarrow G$ .

**Теорема 1 [5].** Операция  $L(x, y)$ , определяемая формулами (1), задает квазигруппу на множестве  $G^n$  при любых  $p_1, \dots, p_n$  тогда и только тогда, когда семейство  $F = (f_1, \dots, f_n)$  является правильным.

**Замечание 1.** При фиксированных функциях  $f_1, \dots, f_n$  и варьируемых  $p_1, \dots, p_n$  соотношения (1) могут задавать одну и ту же операцию. В то же время существуют правильные семейства  $(f_1, \dots, f_n)$ , задаваемые короткими формулами и определяющие  $(k^{k^2})^{n-1}$  попарно различных квазигрупп, где  $k = |G|$  [6].

**Замечание 2.** Соотношения (1) могут быть обобщены на случай операций большей ариности ( $d$ -квазигрупп), при этом в качестве опорной алгебраической структуры  $G$  могут быть использованы произвольные  $(d+1)$ -квазигруппы [6].

**Теорема 2.** Обобщенный регистр сдвига задает ортоморфизм на  $G^n$  тогда и только тогда, когда любой нетривиальный сдвиг (прибавление одной и той же константы к значениям всех аргументов) меняет значение функции  $g$ .

**Замечание 3.** Обобщенные регистры сдвига порождают (см. выше)  $k^{n-1} \cdot (k!)^{k^{n-2}}$  попарно различных квазигрупп, не порождаемых с помощью правильных семейств.

**Заключение.** Рассмотрены две конструкции, позволяющие эффективно по памяти задавать квазигруппы большого порядка: правильные семейства функций и ортоморфтизмы на основе обобщенных регистров сдвига с обратной связью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ. – 2008. – № 2. – С. 28–32.
2. Markovski S., Mileva A. NaSHA — family of cryptographic hash functions // The First SHA-3 Candidate Conference. – Leuven, 2009.
3. Sade A. Quasigroups automorphes par le groupe cyclique // Can. J. Math. – 1957. – Vol. 9. – p. 321–335.
4. Mileva A., Markovski S. Quasigroup representation of some Feistel and generalized Feistel cyphers // Advances in Intelligent Systems and Computing — ICT Innovations, 2012. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 161–171.
5. Nosov V.A., Pankratiev A.E. Latin Squares over Abelian Groups // J. Math. Sci. – 2008. – Vol. 149. no. 3. – p. 1230–1234.
6. Галатенко А.В., Носов В.А., Панкратьев А.Е., Царегородцев К.Д. О порождении  $n$ -квазигрупп с помощью правильных семейств функций // Дискрет. матем. – 2023. – Т. 35. № 1. – С. 35–53

УДК 517

## **ОСЦИЛЛИРУЮЩАЯ АСИМПТОТИКА ТУННЕЛИРОВАНИЯ СПЕКТРА КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРА НА АЛГЕБРЕ SU(1,1)**

С.В. Румянцева

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»  
Россия, г. Москва, Покровский бульвар, д. 11, 109028

E-mail: srumyantseva@hse.ru

***Аннотация.** Рассмотрена задача о туннелировании дискретного спектра квадратичного оператора на алгебре Ли  $su(1,1)$ . Применяя когерентное преобразование и комплексный метод ВКБ, в работе была построена асимптотика туннелирования для модельного гамильтониана на  $su(1,1)$ . Полученная формула отличается от классической формулы Ландау-Лифшица для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа двойной ямы наличием осциллирующего множителя. Данный эффект возникает из-за интерференции туннелирования по двум негомоторным инстантонам.*

***Ключевые слова.** Квазиклассическое приближение, метод ВКБ, туннельное расщепление.*

## **OSCILLATING ASYMPTOTICS OF SPECTRUM TUNNELING OF A QUADRATIC OPERATOR ON THE ALGEBRA SU(1,1)**

S.V. Rumyantseva

National Research University Higher School of Economics  
Russia, Moscow, Pokrovsky Bulvar, 11, 109028

E-mail: srumyantseva@hse.ru

***Abstract.** The problem of discrete spectrum tunneling of a quadratic operator on the Lie algebra  $su(1,1)$  is considered. Using the coherent transformation and the complex WKB method, the tunneling asymptotics for the model Hamiltonian on  $su(1,1)$  were obtained. The resulting formula differs from the classical Landau-Lifshitz formula for a one-dimensional Schrodinger operator with a double well-type potential by the presence of*

*an oscillating factor. This effect occurs due to the interference of tunneling over two non-homotopic instantons.*

**Keywords.** *quasi-classical approximation, WKB method, tunnel splitting.*

**Введение.** Известно, что для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа симметричной двойной ямы квазиклассическая асимптотика пары близких энергий определяется формулой Ландау-Лившица [1]. С другой стороны, при исследовании мономолекулярных магнитов было показано, что для операторов на алгебре Ли  $su(2)$  асимптотика расщепления пары близких энергий имеет нестандартный вид: в асимптотике возникает дополнительный осциллирующий множитель [2]. В данной работе мы исследуем появление осциллирующего туннельного эффекта в задаче на алгебре Ли  $su(1,1)$  (см. [3]).

**Постановка задачи.** В работе исследуется задача о построении квазиклассической асимптотики величины туннельного расщепления спектра одномерного оператора, заданного на алгебре Ли  $su(1,1)$ :

$$\hat{H} = \hat{Y}_1^2 - \hat{Y}_2^2 + \alpha(\hat{A} - \beta)^2, \quad (1)$$

где операторы  $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{A}$  являются образующими алгебры  $su(1,1)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные постоянные. Заметим, что траектории классического движения для гамильтониана (1) на симплектическом листе имеют вид симметричной двойной ямы.

Раскладывая по когерентным состояниям алгебры  $su(1,1)$ , мы получаем представление спектральной задачи для оператора (1) в виде дифференциального уравнения 2-го порядка в пространстве голоморфных функций в единичном круге. Применяя комплексный метод ВКБ для построения квазиклассических асимптотик решений дифференциального уравнения и их согласования в окрестностях точек поворота и особых точек, мы получаем асимптотики туннельного расщепления энергий исследуемого оператора (1).

**Теорема.** Пусть  $\alpha > 1$  и  $\alpha|2\beta - 1| < 1$ . Тогда асимптотика туннельного расщепления энергий оператора (1) имеет вид:

$$\Delta E_n = (-1)^n \frac{2\hbar\omega}{\pi} \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar} \oint_{\Gamma} \theta^c\right\} \sin\left(\frac{i\pi}{\hbar} \operatorname{Res}_{z=\xi_0} \theta^c + O(\hbar)\right) (1 + O(\hbar))$$

если соответствующие энергии лежат в интервале

$$-\frac{\alpha(4\beta^2 - 1) + 1}{4(\alpha - 1)} < E < \frac{\alpha(4\beta^2 - 1) - 1}{4(\alpha + 1)}.$$

Асимптотика расщепления имеет вид:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar\omega}{\pi} \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar} \oint_{\Gamma} \theta^c\right\} (1 + O(\hbar))$$

для пар энергий из интервала

$$\frac{\alpha(4\beta^2 - 1) - 1}{4(\alpha + 1)} < E < \alpha\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Асимптотические формулы выражены в терминах комплексифицированного фазового пространства. Здесь  $\hbar$  – малый положительный параметр квазиклассического приближения, периодическая траектория  $\Gamma$  – инстантон, пересекающий пару классических траекторий, а  $d\theta^c$  – симплектическая структура. Частота  $\omega$  отвечает периодическому движению по классической траектории.

**Заключение.** В отличие от одномерного оператора Шредингера, туннельное расщепление спектра оператора (1) не только экспоненциально убывает, но также содержит осциллирующий множитель. Данный эффект обусловлен интерференцией туннелирования по двум различным инстантонам. Можно также заметить, что при определенных параметрах системы, где осциллирующий множитель обращается в 0, эффект туннелирования пропадает и возникает двукратное вырождение уровней спектра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: Нерелятивистская теория. – Наука, 1989. – С. 521.
2. Garg A. Quenched spin tunneling and diabolical points in magnetic molecules. II. Asymmetric configurations //Physical Review B. – 2001. – Т. 64. – №. 9. – С. 094414.
3. Vybornyi E. V., Romyantseva S. V. Semiclassical Asymptotics of Oscillating Tunneling for a Quadratic Hamiltonian on the Algebra  $su(1, 1)$  //Math. Notes. – 2022. – Т. 112. – №. 5. – С. 665-681.



УДК 512.55

## ПРЕДСТАВИМОСТЬ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ В ВИДЕ СУММЫ ПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д.Т. Тапкин, А.Н. Абызов

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, 420008

E-mail: danil.tapkin@yandex.ru

***Аннотация.** Если каждый элемент конечного поля  $F$  из не менее чем 4 элементов представим в виде суммы идемпотента (трипотента) и  $q$ -потента, то и каждая матрица из  $M_n(F)$  представима в виде суммы идемпотента (трипотента) и  $q$ -потента. Был предложен общий подход для рассмотрения сумм  $p$ -потентов и  $q$ -потентов.*

***Ключевые слова.** Поля, потенты, кольцо матриц.*

## ON REPRESENTATION OF MATRICES OVER FIELDS AS A SUM OF POTENTS

D.T. Tapkin, A.N. Abyzov

Kazan Federal University  
Russia, Kazan, Kremlyovskaya str., 18, 420008

E-mail: danil.tapkin@yandex.ru

***Abstract.** If every element of a finite field  $F$  with no less than 4 elements is a sum of an idempotent (tripotent) and a  $q$ -potent, then every matrix in  $M_n(F)$  is a sum of an idempotent (tripotent) and a  $q$ -potent. We present general method for considering sums of  $p$ -potents and  $q$ -potents.*

***Keywords.** Fields, potents, matrix ring.*

В статьях [1-3] рассматривался вопрос представимости элементов кольца матриц над полем в виде суммы идемпотента (трипотента) и  $q$ -потента. Наличие подобного разложения в поле  $F$  как правило гарантирует существования разложения и в кольце матриц над полем  $F$ . Имеется только несколько исключений. К примеру, в поле  $\mathbb{F}_3$  каждый

элемент есть сумма идемпотента и трипотента, но уже в  $M_3(\mathbb{F}_3)$  существует матрица, которая не представима в виде суммы идемпотента и трипотента (см. [2, пример 10]).

Пусть теперь поле  $F$  обладает свойством: каждый элемент поля представим в виде суммы  $r$ -потента и  $q$ -потента. Компьютерные эксперименты показывают, что за редким исключением свойство представимости переносится и на матричные кольца. А именно, имеют место следующие гипотезы.

**Гипотеза 1.** Пусть  $F$  – конечное поле нечетной характеристики,  $|F| > 3$  и  $p, q > 1$ . Если каждый элемент поля  $F$  представим в виде суммы  $r$ -потента и  $q$ -потента, то и каждый элемент кольца  $M_n(F)$  представим в виде суммы  $r$ -потента и  $q$ -потента.

**Гипотеза 2.** Пусть  $F$  – конечное поле характеристики 2,  $p, q > 2$  и в поле  $F$  существуют нетривиальные  $r$ -потенты и  $q$ -потенты. Если каждый элемент поля  $F$  представим в виде суммы  $r$ -потента и  $q$ -потента, то и каждый элемент кольца  $M_n(F)$  представим в виде суммы  $r$ -потента и  $q$ -потента.

Данные гипотезы пока остаются недоказанными, однако вопрос их доказательства сведен к исследованию свойств полей, которые, как показывают компьютерные эксперименты, выполняются для всех полей  $F$  таких, что  $7 < |F| < 2000$ . Рассмотрим следующую гипотезу.

**Гипотеза 3.** Пусть  $F$  – конечное поле,  $|F| > 7$ ,  $q_1, q_2 \geq 4$  и  $q_1 - 1, q_2 - 1$  делят  $|F| - 1$ . Пусть также каждый элемент поля  $F$  представим в виде суммы  $q_1$ -потента и  $q_2$ -потента. Тогда для одной из пар  $(q_1, q_2)$  или  $(q_2, q_1)$ , обозначенной далее как  $(p, q)$ , выполняются условия:

1. в поле  $F$  существует по крайней мере три различных ненулевых  $q$ -потента, которые представимы в виде  $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  – различные  $r$ -потенты;

2. для любого ненулевого элемента  $f \in F$  найдутся различные ненулевые  $q$ -потенты  $\beta_1, \beta_2 \in F$  и ненулевой  $r$ -потент  $\gamma \in F$  такие, что  $(\beta_1 + \beta_2) + \gamma = f$ .

**Теорема 1.** Если гипотеза 3 верна, то верны и гипотезы 1 и 2.

С помощью предыдущей теоремы можно доказать как известные результаты, так и ряд новых утверждений.

**Теорема 2.** Если  $R$  – коммутативное кольцо и  $2 \in U(R)$ , то следующие условия равносильны:

1) для каждого натурального числа  $n$  в кольце  $M_n(R)$  всякая матрица представима в виде суммы двух 4-потентных матриц;

2) для каждого натурального числа  $n$  в кольце  $M_n(R)$  всякая матрица представима в виде суммы идемпотентной матрицы и 7-потентной матрицы;

3) в кольце  $R$  выполнено тождество  $x^7 = x$ .

*Работа осуществлена при финансовой поддержке  
РНФ и Кабинета Министров Республики Татарстан  
в рамках научного проекта № 23-21-10086.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин, Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы идемпотентной матрицы и  $q$ -потентной матрицы // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 1, № 1. – С. 3–18.
2. A.N. Abyzov, D.T. Tapkin, When is every matrix over a ring the sum of two tripotents? // Linear Algebra Appl. – 2021. – V. 630. – pp. 316–325.
3. A.N. Abyzov, S.D. Cohen, P.V. Danchev, D.T. Tapkin, Rings and finite fields whose elements are sums or differences of tripotents and potents (preprint).
4. Y. Hirano, H. Tominaga, Rings in which every element is the sum of two idempotents // Bull. Austral. Math. Soc. – 1998 – V. 37. – pp. 161–164.

UDC 512.714

**MONOMIAL ROTA–BAXTER OPERATORS  
OF WEIGHT ZERO ON  $F_0[x, y]$**

A.F. Khodzitskii

Novosibirsk State University  
Russia, Novosibirsk, Pirogova str., 2, 630090

E-mail: a.khodzitskii@g.nsu.ru

**Abstract.** *We have described all monomial Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  satisfying the conditions that  $\ker R$  does not contain monomials and  $\deg(R(x^n y^m)) \leq n + m$ . Here  $F_0[x, y] = F[x, y] \setminus F$ . We also classify Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ) coming from monomial averaging operators on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ) with linear dependencies on degrees.*

**Keywords.** *Averaging operator, Rota–Baxter operator, polynomial algebra.*

Given an algebra  $A$  over a field  $F$ , a linear operator  $R$  on  $A$  is called a Rota–Baxter operator, if the following relation

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab)$$

holds for all  $a, b \in A$ . Here  $\lambda \in F$  is a fixed scalar called a weight of  $R$ . Rota–Baxter operator is an algebraic generalization of the integral operator.

An operator  $L$  on  $F[x, y]$  is called monomial if  $L(x^k y^l) = \varepsilon_{kl} x^{a_{kl}} y^{b_{kl}}$ , where  $\varepsilon_{kl} \in F$  for all  $k, l \in \mathbb{N}$ . Monomial Rota–Baxter operators on  $F[x]$  were introduced in [1], and such operators on  $F[x, y]$  were classified in [2].

Define  $F_0[x, y] = F[x, y] \setminus F^*$ . Let  $R$  be a monomial RB-operator on  $F_0[x, y]$ . Define

$$Sh(R) = \{x^k y^l \mid R(x^k y^l) = \alpha x^n y^m, x^k y^l \neq x^n y^m, \alpha \neq 0\}.$$

**Theorem.** Let  $R$  be a monomial Rota–Baxter operator of weight 0 on  $F_0[x, y]$  such that  $\ker R$  does not contain monomials,  $Sh(R) \neq \emptyset$ , and  $\deg(R(x^n y^m)) \leq n + m$ . Then  $R$  is one of the following operators:

$$R_1(x^{sn+k} y^m) = \begin{cases} \frac{(k-a_k)\alpha_{k,0}\alpha_{n,0}}{s\alpha_{0,1}+(m+k-a_k)\alpha_{n,0}} x^{sn} y^{m+k-a_k}, & 0 < k < n, \\ \frac{\alpha_{n,0}\alpha_{0,1}}{s\alpha_{0,1}+m\alpha_{n,0}} x^{sn} y^m, & k = 0, \end{cases}$$

$$R_2(x^k y^m) = \begin{cases} \frac{(k - a_k)\alpha_{k,0}}{m + k - a_k} y^{m+k-a_k}, & 0 < k, \\ \frac{\alpha_{0,1}}{m} y^m, & k = 0, \end{cases}$$

where  $\{a_1, \dots, a_{n-1} \mid 0 \leq a_k < k\}$  (for  $R_1$ ) and  $\{a_1, a_2, \dots \mid 0 \leq a_k < k\}$  (for  $R_2$ ).

We have described all monomial Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  such that  $Sh(R) = \emptyset$ . A partial classification of homogeneous monomial Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  was obtained.

Let  $A$  be an algebra over a field  $F$ , then a linear operator  $T$  on  $A$  is called averaging operator, if the relations  $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$  hold for all  $a, b \in A$ .

In [3], a class of Rota–Baxter operators of nonzero weight on  $F[x, y]$  coming from averaging operators was described. In the case of Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ) we consider the similar class of operators. Let  $T$  be an averaging operator of the form

$$T(x^n y^m) = \varepsilon_{n,m} x^{an+\beta m+\gamma} y^{pn+qn+c}$$

for some  $\alpha, \beta, \gamma, p, q, c \in N$  and  $\varepsilon_{n,m} \in F$ , then up to change  $x$  with  $y$  it has to be one of the following operators on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ):

- (1)  $T(x^n y^m) = \beta_{n,m} x^{r(m+c)} y^{m+c}, r \geq 0, c > 0 (c \geq 0)$ ,
- (2)  $T(x^n y^m) = \beta_{n,m} y^{rn+m+c}, r, c \geq 0$ ,
- (3)  $T(x^n y^m) = \beta_{n,m} x^{n+\gamma} y^{m+c}, \gamma, c \geq 0$ ,
- (4)  $T(x^n y^m) = \beta_{n,m}$ .

**Problem.** Describe all Rota–Baxter operators of weight 0 on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ) of the form  $R(x^n y^m) = \alpha_{n,m} T(x^n y^m)$ , where  $\alpha_{n,m} \in F$  and  $T$  is a monomial averaging operator on  $F_0[x, y]$  ( $F[x, y]$ ).

We solve Problem completely for all cases with condition that  $\alpha_{n,m} \neq 0$  for all  $n, m$ .

*The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10005, <https://rscf.ru/project/23-71-10005/>.*

## REFERENCES

1. L. Guo, M. Rosenkranz, and S. H. Zheng. Rota–Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) 275 (2015) 481–507.

2. H. Yu. Classification of monomial Rota-Baxter operators on  $k[x]$ . J. Algebra Appl. 15 (2016), 1650087, 16 p.
3. A. Khodzitskii, Monomial Rota–Baxter Operators of Nonzero Weight on  $F[x, y]$  Coming from Averaging Operators, Mediterr. J. Math. 20 (2023), No 251.

УДК 512.541

**АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С ИЗОМОРФНЫМИ СИЛЬНО  
ИНВАРИАНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

А.Р. Чехлов, П.В. Данчев

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [cheklov@math.tsu.ru](mailto:cheklov@math.tsu.ru)

Institute of Mathematics and Informatics, Section of Algebra,  
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1113, Bulgaria

E-mails: [danchev@math.bas.bg](mailto:danchev@math.bas.bg)

***Аннотация.** Исследуются абелевы группы, нетривиальные сильно инвариантные подгруппы которых изоморфны. Указано строение периодических и смешанных групп с этим свойством, получен ряд результатов и для случая групп без кручения.*

***Ключевые слова.** Сильно инвариантная подгруппа, изоморфизм,  $si$ -простая группа.*

**ABELIAN GROUPS HAVING ISOMORPHIC STRONGLY  
INVARIANT SUBGROUPS**

A.R. Chekhlov, P.V. Danchev

Tomsk State University, Tomsk 634050, Russia

E-mail: [cheklov@math.tsu.ru](mailto:cheklov@math.tsu.ru)

Institute of Mathematics and Informatics, Section of Algebra,  
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1113, Bulgaria

E-mail: [danchev@math.bas.bg](mailto:danchev@math.bas.bg)

***Abstract.** We study Abelian groups whose non-trivial strongly invariant subgroups are isomorphic. The structure of torsion and mixed groups with this property is indicated, and a number of results are obtained for the case of torsion-free groups.*

***Keywords.** Strongly invariant subgroup, isomorphism,  $si$ -simple group.*

**Введение.** Все группы предполагаются абелевыми. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *сильно инвариантной*, если  $\varphi(H) \leq H$  для всякого гомоморфизма  $\varphi: H \rightarrow G$ . Сильно инвариантные подгруппы изучались, напр., в [1-2]. Ненулевую группу  $G$  назовем *ISI-группой*, если она имеет только тривиальные (т.е.  $0$  и  $G$ ) сильно инвариантные подгруппы или все ее ненулевые сильно инвариантные подгруппы изоморфны. В [3] исследовались группы с изоморфными инвариантными подгруппами. Группа называется *si-простой*, если она не имеет нетривиальных сильно инвариантных подгрупп. Группа без кручения называется *s-неприводимой*, если она не имеет собственных чистых сильно инвариантных подгрупп.

### Результаты.

**Теорема 1.** Ненулевая периодическая группа  $G$  является ISI-группой тогда и только тогда, когда  $pG = 0$  или  $p^2G = 0$  для некоторого простого числа  $p$ .

**Теорема 2.** Смешанная группа  $G$  является ISI-группой тогда и только тогда, когда  $G = T \oplus R$ , где  $T$  – элементарная  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ , а  $R$  – такая si-простая группа без кручения, что  $pR \neq R$ .

**Предложение 1.** Нередуцированная группа  $G$  является ISI-группой тогда и только тогда, когда  $G = D \oplus R$ , где  $D$  – делимая группа без кручения, а  $R$  – si-простая группа без кручения.

**Предложение 2.** Ненулевая делимая группа  $D$  является ISI-группой тогда и только тогда, когда  $D$  – делимая группа без кручения.

**Предложение 3.** Если  $G$  – неоднородная ISI-группа без кручения, то  $\tau(G) = \{t_1, t_2\}$ , где  $t_1 < t_2$  и нетривиальная si-подгруппа группы  $G$  совпадает с  $G(t_2)$ .

**Пример 1.** Существует приводимая s-неприводимая группа.

**Пример 2.** Существует такая группа без кручения  $G$ , что  $G$  содержит si-подгруппу ранга  $2r$  для всякого натурального числа  $r \geq 2$ .

**Пример 3.** Существует однородная группа без кручения не являющаяся si-простой группой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Călugăreanu G. (2015) Strongly invariant subgroups, Glasg. Math. J. 57, no 2, pp. 431–443.



2. Chekhlov A.R. (2017) On strongly invariant subgroups of abelian groups. Math. Notes 102, no 1, pp. 106–110.
3. Chekhlov A.R. and Danchev P.V. (2015) On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic, Commun. Algebra 43, no 12, pp. 5059–5073.

## ON THE QUESTION OF CORRECTNESS AND SERVANT CORRECTNESS OF HOMOGENEOUS COMPLETELY DECOMPOSABLE GROUPS

A.I. Sherstneva, O.V. Yanushchik\*, V.S. Sherstnev\*

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

\*Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: sherstneva@tpu.ru

**Abstract.** *In this paper we study the applicability of the analogue of the well-known Cantor-Schroeder-Bernstein set-theoretic theorem for groups in the case when one of the groups is homogeneous completely decomposable. A correctness theorem for homogeneous fully decomposable groups is proved. The criteria of correctness and servant correctness of a homogeneous completely decomposable group are obtained.*

One of the fundamental statements of set theory (the theorem of Georg Cantor – Felix Bernstein – Ernst Schroeder) – "if a set is equal to its subset, then it is also equal to any intermediate subset" has served as a source for the formulation of similar problems in many areas of mathematics, including the theory of abelian groups.

According to [1], two groups, each of which is isomorphic to a subgroup of the other group, are called almost isomorphic. Two groups are called almost isomorphic by subgroups with some property if each of them is isomorphic to a subgroup of the other group possessing this property. In particular, groups  $A$  and  $B$  are almost isomorphic on servant subgroups if each of them is isomorphic to a servant subgroup of the other group. In connection with the above statement, the question arises whether from the almost isomorphism of groups will follow their isomorphism.

In investigating whether an analogue of the Cantor-Schroeder-Bernstein set-theoretic theorem for abelian groups will be true, an approach where one of the groups is fixed and the other covers the whole class of abelian groups is convenient.

A group  $A$  is called correct if for any group  $B$ , the fact that  $A$  and  $B$  are almost isomorphic follows from  $A \cong B$ . A group  $A$  is called servant-correct if for any group  $B$  the fact that  $A$  and  $B$  are almost isomorphic by servant (quite characteristic) subgroups implies  $A \cong B$  [2].

According to [3], a torsion-free group  $A$  is called completely decomposable if it is a direct sum of groups of rank 1. Let us assume that a fully decomposable group  $A$  is correct in the class of fully decomposable groups if, for any fully decomposable group  $B$ , it follows from the fact that  $A$  and  $B$  are almost isomorphic that  $A \cong B$  follows.

Let us prove the following auxiliary assertions.

**Lemma 1.** If for any servant subgroup  $B$  of group  $A$  it follows from the fact that  $A$  is isomorphic to some servant subgroup  $C$  of group  $B$  that  $A \cong B$ , then the group  $A$  is servant-correct.

*Proof.*

Consider a group  $A'$  such that  $A$  and  $A'$  are almost isomorphic in terms of servant subgroups. Then  $A \cong B'$ ,  $A' \cong B$ , where  $B'$  and  $B$  are the servant subgroups of groups  $A'$  and  $A$  respectively. Let  $\varphi$  be an isomorphic mapping  $A'$  to  $B$  and  $\varphi(B') = C$ . Since  $B'$  is a servant subgroup of group  $A'$ ,  $C$  is a servant subgroup of group  $B$ . We have  $A \cong B' \cong \varphi(B') = C$ , that is,  $A \cong C$ . Using the condition of the lemma, we obtain that  $A \cong B$ . But  $B \cong A'$ , whence it follows that  $A \cong A'$ . Thus, the group  $A$  is servant-correct.

The lemma is proved.

**Lemma 2.** If for any subgroup  $B$  of group  $A$  it follows from the fact that  $A$  is isomorphic to some subgroup  $C$  of group  $B$  that  $A \cong B$ , then  $A$  is correct.

The proof of Lemma 2 is similar to the proof of Lemma 1.

The main results of the paper are the following theorems.

**Theorem 1.** A homogeneous fully decomposable group is correct if and only if it has finite rank or is a free group.

*Proof.*

1. Let  $A$  be a homogeneous completely decomposable group, which is not free and has infinite rank. Then the group  $A$  has nonzero type and it can be represented in the following form:  $A = A^* \oplus A'$  where  $A'$  has rank 1 and  $A^* \cong A$ . Let  $a \in A'$  and  $B' = \langle a \rangle$ . Denote by  $B$  the group  $A^* \oplus B'$ . Since  $A \cong A^*$ , the groups  $A$  and  $B$  are almost isomorphic. Since  $B'$  is of type zero and  $A^*$  is nonzero, the group  $B$  is not homogeneous, hence  $A$  and  $B$  are not isomorphic groups. We get that group  $A$  is not correct.

2. Let  $A$  be a free group or of finite rank;  $B$  a subgroup of group  $A$ ;  $C$  a subgroup of group  $B$  and  $A \cong C$ . Let us show that  $A \cong B$ . Then according to Lemma 2 it will be proved that the group  $A$  is correct.

We have  $C \subseteq B \subseteq A$ , hence  $r(C) \leq r(B) \leq r(A)$ . But  $r(A) = r(C)$ , since  $A \cong C$ , whence we obtain that  $r(A) = r(B)$ .

If  $A$  is a free group, then  $B$  is also a free group, since the subgroups of free groups are free. We obtain that  $A$  and  $B$  are free groups having the same rank, hence,  $A \cong B$ .

Let us now consider the case when the group  $A$  has finite rank. Let  $t$  denote the type of the group  $A$ .

Let us show that the group  $B$  is homogeneous of type  $t$ . Let us denote by  $a_1, a_2, \dots, a_k$  the maximal linearly independent system of elements of group  $C$ . The type of these elements in group  $C$  is  $t$ , since  $A \cong C$ .  $C$  is a subgroup of group  $B$ , hence the type of these elements in group  $B$  is greater than or equal to  $t$ .

But, on the other hand,  $B$  is a subgroup of group  $A$ , from where we obtain that their type in group  $B$  is less than or equal to  $t$ . Thus, the elements  $a_1, a_2, \dots, a_k$  have type  $t$  in group  $B$ . Since  $r(C) = r(B)$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  is the maximum linearly independent system of elements in group  $B$ , i.e. any element from group  $B$  depends linearly on the system of elements  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . It follows from this that the type of any element from the group  $B$  is  $t$ , i.e. the group  $B$  is homogeneous of type  $t$ .

Thus,  $B$  is a homogeneous subgroup of group  $A$  having the same type as group  $A$ . Then it follows from [3] that  $B$  is a completely decomposable group. We obtain that groups  $A$  and  $B$  are homogeneous completely decomposable groups having the same type and rank, hence  $A \cong B$ .

The theorem is proved.

## REFERENCES

1. Jonson, B. (1959). On direct decomposition of torsion free abelian groups. *Mathematica Scandinavica*, no 2, pp. 361–371.
2. Grinshpon, S. Ya. (1989). F.I.-correctness of torsion-free Abelian groups. *Abelian groups and modules*, issue 8, pp. 65–79.
3. Fuchs, L. (1997). *Infinite abelian groups*, M.: Mir, vol. 2, p. 335.

**Секция 2**  
**Вычислительная математика**  
**и компьютерное моделирование**

УДК 536.3, 629.783

## ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ СПУТНИКА 1U CUBESAT

А.В. Азин, А.В. Бельков, А.П. Жуков,  
С.В. Пономарев, А.В. Васильев

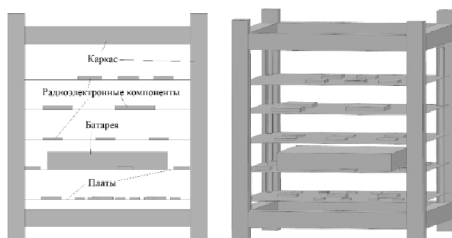
Национальный исследовательский  
Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

**Аннотация.** *Космические аппараты CubeSat не имеют активных систем терморегулирования, однако для сохранения работоспособности имеющих радиоэлектронных компонент необходимо поддерживать их температуру в определенном интервале. В данной работе рассмотрено влияние на тепловое состояние космического аппарата 1U CubeSat тепловыделения размещенного на платах радиоэлектронного оборудования. Учитывались: поглощенное излучение от внешних источников, излучение с внешних поверхностей корпуса CubeSat, тепловыделение радиоэлектронных компонент, перенос излучения внутри корпуса.*

**Ключевые слова.** *CubeSat, космический аппарат, тепловое состояние, излучение, форм-фактор.*

**Введение.** Выполнено численное моделирование теплового состояния космического аппарата (КА) стандарта CubeSat формата 1U. В соответствии со стандартом PC/104 [1] расстояние между платами устанавливается равным 15 мм (рис. 1).



*Рис. 1. Расположение плат, радиоэлектронных компонент и аккумуляторной батареи*

**Постановка задачи.** Рассматривается КА, занимающий объем  $V$  и имеющий внешние ( $S_{out}$ ) и внутренние ( $S_{in}$ ) свободные поверхности. КА движется по круговой орбите в плоскости земного экватора на высоте 300 км. Тепловое состояние КА в момент времени  $t$  описывается нестационарным уравнением теплопроводности

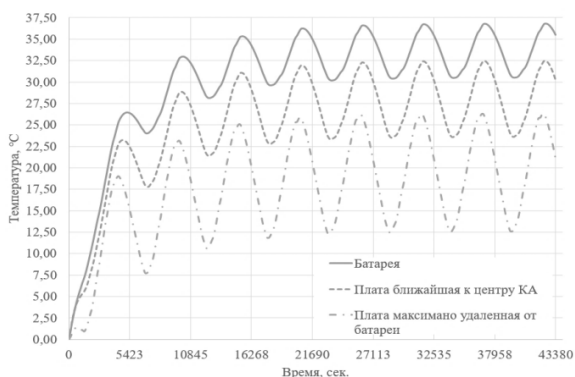
$$c\rho T_{,t} = k\Delta T + q_V, \quad T(t=0) = T_0, \quad (x, y, z) \in V,$$

$$k \cdot T_{,n} = q_{rad(out)}, \quad (x, y, z) \in S_{out}, \quad k \cdot T_{,n} = q_{rad(in)}, \quad (x, y, z) \in S_{in},$$

где  $T=T(t, x, y, z)$  – температура материала КА в момент времени  $t$  в точке с координатами  $x, y, z$ ;  $c=c(x, y, z)$ ,  $\rho=\rho(x, y, z)$  и  $k=k(x, y, z)$  – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность материала;  $q_V=q_V(x, y, z)$  – плотность внутренних тепловых источников;  $q_{rad(out)}$  и  $q_{rad(in)}$  – плотности потоков излучения от внешних и внутренних источников поглощенных свободными поверхностями. Если представит  $S_{in}$  в виде совокупности  $I$  диффузно-серых поверхностей, образующих замкнутую область, то плотность потока излучения  $\psi_i$ , теряемого поверхностью  $S_j$ , определяется из решения системы уравнений [2]. Более подробно постановка задачи приводится в работе [3].

**Результаты.** На рисунке (рис. 2) представлено изменение температуры батареи и плат с радиоэлектронными компонентами КА во время нахождения аппарата на круговой орбите в экваториальной плоскости на высоте 300 км, с периодом обращения равным 90 минут. В виду того что максимальное значение температуры достигается в батарейном отсеке показаны зависимости для батареи, а также для ближайшей и самой отдаленной от него плат. Термические свойства материалов и поверхностей, а также мощности тепловыделения радиоэлектронных компонент плат взяты из работ [3,4].

**Заключение.** Численно исследовано нестационарное тепловое состояние КА 1U CubeSat при его движении по орбите. Источниками тепловыделения являются радиоэлектронные компоненты, располагающиеся на платах. Мощности тепловыделения на радиоэлектронных компонентах и аккумуляторной батарее полагались постоянными по времени. Приведены расчетные температуры батареи, а также плат, одна из которых расположена вблизи геометрического центра корпуса (она же самая близкая к батарее), а вторая находится на максимальном удалении от батареи. Показано, что температуры рассматриваемых элементов осциллируют. Осцилляции обусловлены орбитальным движением КА. В расчетном случае температуры рассматриваемых элементов не превысили допустимых пределов.



*Рис. 2. Зависимость температуры плат и батареи от времени*

*Работа выполнена в рамках государственного задания  
Министерства науки и высшего образования  
Российской Федерации (тема № 0721-2020-0036).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. PC/104 Pluse Specification v. 2.0. 2003. 28 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://resources.winsystems.com/specs/PC104PlusSpec.pdf> (дата обращения: 07.09.2022)
2. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров: пер с англ. справ. – М.: Атомиздат, 1979. 216 с.
3. Белов С.В., Бельков А.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В. Тепловое состояние малого спутника при различной плотности расположения электронных плат // Математика и механика. 2023. № 82. С. 66–81. doi: 10.17223/19988621/82/6.
4. Кузнецов Г.В., Белозерцев А.В. Численное моделирование температурных полей силовых транзисторов с учетом разрывов коэффициентов переноса // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308., № 1. – С. 150–154.



УДК 519.6

**ПРИМЕНЕНИЕ КАПЕЛЬНОГО БИОФИЛЬТРА  
ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА  
САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД В ДВУМЕРНОМ  
ПРИБЛИЖЕНИИ**

А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [nastya.amzarakova.00@mail.ru](mailto:nastya.amzarakova.00@mail.ru)

***Аннотация.** Рассматривается двумерная модификация математических моделей Стритера-Фелпса, Моно, Доббинса-Дриснека и Кемпа с использованием капельного биофильтра. По результатам численных расчетов исследуется влияние скорости убыли и увеличения кислорода за счет различных факторов, а также поступления загрязнения, вымываемого из донных отложений. Численная реализация осуществляется с помощью неявного разностного метода.*

***Ключевые слова:** биофильтр, дефицит кислорода, органическое вещество, модель, численная реализация, неявная схема.*

**APPLICATION OF A DRIP BIOFILTER IN NUMERICAL  
MODELING OF THE PROCESS OF WASTEWATER  
SELF-PURIFICATION IN TWO-DIMENSIONAL  
APPROXIMATION**

A.V. Amzarakova, M.D. Mikhailov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [nastya.amzarakova.00@mail.ru](mailto:nastya.amzarakova.00@mail.ru)

***Abstract.** In the present study, we consider a two-dimensional modification of the Streeter-Phelps, Monod, Dobbins-Driscack and Camp mathematical models using a drip biofilter. Based on the results of the numerical calculations, the influence of the rate of decrease and increase in oxygen due to various factors and the flow of organic substances from bottom sediments,*

is studied. The numerical realization is implemented using the implicit method.

**Keywords:** biofilter, oxygen deficiency, organic substance, model, numerical realization, implicit scheme.

**Введение.** Озеро Байкал является самым большим по объему пресным водоемом Евразии, в который впадает более трехсот рек. Вследствие антропогенного воздействия на притоки в озеро поступают «условно» очищенные сточные воды.

Рассматривается модель процесса самоочищения сточных вод на примере Томи. Течение реки моделируется каналом, имеющим прямоугольную форму, по которому течет идеальная несжимаемая жидкость. В двумерном приближении течение жидкости характеризуется двумя пространственными координатами  $X$  и  $y$  и временем  $t$ .

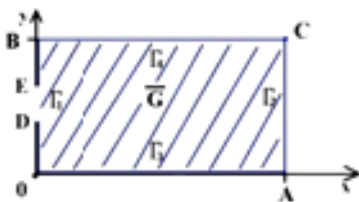


Рис. 1. Расчетная область

Органическое вещество (нефтепродукты,  $L = 0,619$  мг/л) в течение 2-х суток сбрасывается в реку и потоками воды перемещается по её течению со скоростью 28,5 км/сут. Одновременно с этим меняется концентрация микроорганизмов  $X$  (мг/л) и дефицита кислорода  $D$  (мг/л). Эти процессы описываются вышеуказанной

модификацией моделей [1,2], в которой учитывается влияние микроорганизмов, окисления субстрата кислородом, процесса аэрации, инициируемого фотосинтезом, и потока загрязнений из донных отложений.

Реализация модели осуществляется с помощью неявного численного метода.

**Постановка задачи.** Рассматривается участок реки Томь длиной 20 км и шириной 0,8 км.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{W} = (L, X, D)^T, \bar{S} = (S_1, S_2, S_3)^T, S_1 = -k_1 L - k_3 L - kL - \frac{\mu_{\max} XL}{Y(K_L + L)} + J_B,$$

$$S_2 = \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L}, S_3 = k_1 L - k_2 D - \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L} + J_1 + J_2 - J_3.$$

В области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ ,  $G = \{(x, y) | 0 < x < A, 0 < y < B\}$ ,  $t \in [0, T]$ ;

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_1^{(3)}$ , где

$\Gamma_1^{(1)} = \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y < D\}$ ,  $\Gamma_1^{(2)} = \{(x, y) | x = 0, D \leq y \leq E\}$ ,

$\Gamma_1^{(3)} = \{(x, y) | x = 0, E < y \leq B\}$ ;  $\Gamma_2 = \{(x, y) | x = A, A < y < C\}$ ,

$\Gamma_3 = \{(x, y) | 0 < x \leq A, y = 0\}$ ,  $\Gamma_4 = \{(x, y) | B < x \leq C, y = B\}$

ищется решение исходной задачи  $\bar{W} \in C_1^{2,2}(\bar{G})$ , удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} = \bar{S} + D_f \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

с соответствующим начальным

$$\bar{W}(x, y, 0) = \bar{W}^0(x, y), (x, y) \in \bar{G} \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\bar{W}(0, y, t) = \bar{W}^{left}, y \in \Gamma_1, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \bar{W}(A, y, t)}{\partial x} = \bar{0}, y \in \Gamma_2, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \bar{W}(x, 0, t)}{\partial y} = \bar{0}, x \in \Gamma_3, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \bar{W}(x, B, t)}{\partial y} = \bar{0}, x \in \Gamma_4, 0 < t \leq T; \quad (3)$$

где

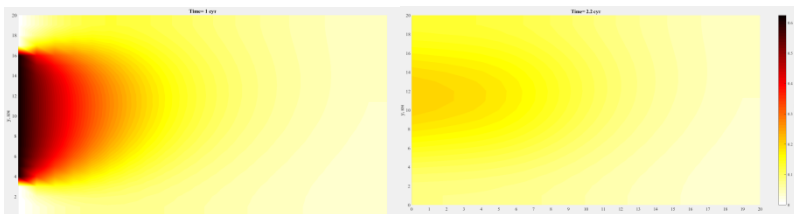
$$\bar{W}^0(x, y) = (0, 1, 0)^T,$$

$$\bar{W}^{left} = \begin{cases} L(0, y, t) = \begin{cases} 0, 619, & y \in \Gamma_1^{(2)}, \\ 0, & y \in \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(3)}, \end{cases} & 0 < t < 2, \\ L(0, y, t) = 0, & y \in \Gamma_1, 2 \leq t \leq T; \\ X(0, y, t) = 1, & y \in \Gamma_1, 0 \leq t \leq T; \\ D(0, y, t) = 0, & y \in \Gamma_1, 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

$k$  – константа скорости изъятия органического вещества (в качестве очистного сооружения используется капельный биофильтр[3]). Смысл остальных параметров из (1)-(3) дается в [1,2].

**Результаты.** Исследованы вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости используемого неявного разностного метода.

Результаты численных расчетов с применением капельного биофильтра представлены на рис. 2 в виде графиков изменения субстрата для двух моментов времени  $t = 1$  сут и  $t = 2,2$  сут.



*Рис. 2. Распределение концентрации субстрата  $L$ , мг/л*

Из рисунка видно, что к моменту времени 1 сут концентрация субстрата распространяется по участку реки, захватывая его полностью. Величина колеблется от 0,619 мг/л до 0,05 мг/л. К моменту времени  $t = 2$  сут происходит отключение подачи субстрата и при  $t = 2,2$  сут величина загрязнения меняется от 0,2 мг/л до 0,01 мг/л.

При  $t = 4,14$  сут величина концентрации устанавливается на значении 0,103 мг/л, а при отключении биофильтра концентрация субстрата достигает такой же величины за 15,14 сут.

Из приведенных данных следует, что в случае использования капельного биофильтра процесс самоочищения загрязненного участка реки ускоряется в  $\approx 3,6$  раза.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-71-10020, <https://www.rscf.ru/project/23-71-10020/>*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алехин В. Е. Анализ и совершенствование математических моделей для прогноза экологической надежности источников коммунального водоснабжения. Дис. канд. техн. наук: 05.17.08, 05.02.13. – Москва, 2006. – 217 с.
2. Давыдов А. С. Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема: магистерская диссертация по направлению подготовки: 01.04.01 – Математика / А. С. Давыдов. – Томск, 2019. – 99 с.
3. Яковлев С. В., Воронов Ю. В. Биологические фильтры. - М.: Стройиздат, 1982. – 121 с.

УДК 614.8: 699.8

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РЕГУЛИРОВАНИЯ РЕЖИМА ГРУНТОВЫХ ВОД НА ИСТОРИЧЕСКИХ ТЕРРИТОРИЯХ**

Е.В. Арефьева

ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ),  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, д. 7, 121352

E-mail: elaref@mail.ru

***Аннотация.** Приводится постановка и решение задач по регулированию режима грунтовых вод на исторических территориях в целях поддержания уровня грунтовых вод в заданном безопасном диапазоне. Предложен подход к решению поставленной задачи с использованием методов регуляризации некорректных экстремальных задач и выработки компромиссных управленческих решений.*

***Ключевые слова.** Подтопление, оптимизационный подход, уравнение Буссинеска, исторические территории, памятники архитектуры*

## **APPLICATION OF THE RESULARIZATION METHOD TO SOLVING PROBLEMS OF REGULATING GROUNDWATER REGIME IN HISTORICAL TERRITORIES**

E. Arefyeva

***Abstract.** The article presents the formulation and solution of problems for regulating the groundwater regime in historical territories in order to maintain the groundwater level in a given safe range to ensure the safety of the cultural archaeological layer and the simultaneous drainage of the foundations of architectural monuments and religious buildings. An approach to solving the problem is proposed using methods for regularizing ill-posed extremal problems and developing compromise management solutions.*

***Keywords.** Flooding, optimization approach, Boussinesq equation, historical territories, architectural monuments*

**Введение.** Подтопление инициирует опасные природные процессы, такие как карст, оползни, суффозии, лессовые просадки, набухание грунтов, и при этом происходит снижение несущей способности грунтов, повышение сейсмической интенсивности территории и др. [1].

Особенно страдают от негативного влияния подземной гидросферы-исторические города и памятники архитектуры, которые не приспособлены к современным техногенным воздействиям [2]. Особенностью исторических городов является наличие культурного слоя – ценный археологический материал. Вода для культурного слоя является консервантом. Фундамент зданий в русских северных городах традиционно располагался на деревянном основании. Влажность грунтов обеспечивает сохранность деревянного основания, а его осушению приводит к гниению и деформациям и разрушениям зданий. При этом подвалы и фундаменты зданий должны быть осушены. Важным решением для мягкого регулирования является использование критерия- порога гидрогеологической опасности, критического уровня грунтовых вод, определяемого для каждого объекта и участка застроенной территории [2].

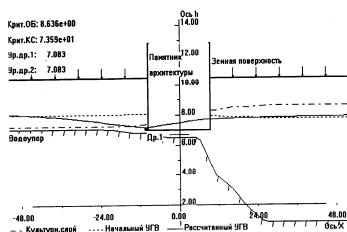
**Постановка задачи.** Вычисление расчетного уровня грунтовых вод (уравнение геофильтрации) выполняется с использованием уравнения Буссинеска (это параболическое уравнение в частных производных) с соответствующими граничными и начальными условиями). Коэффициентами уравнений являются параметры, характеризующие свойства грунтов и дополнительного инфильтрационного питания [3].

Параметрами регулирования являются уровни воды в дренах, объем откачиваемой воды. Критерием оптимальности: объем осушенной призмы культурного слоя, осушенная площадь заглубленных помещений. Регулирующие параметры задаются в виде граничных условий уравнения геофильтрации или функции источника [3]. Критерии оптимизации формулируются в виде функционала. Минимизация функционала определяет степень близости расчетных пониженных значений уровня грунтовых вод с помощью управляющих воздействий до заданного значения [3]. Градиент функционала определяется через решение сопряженной задачи к прямой задаче [4]. Определение градиента функционала и построения минимизирующей его последовательности осуществляется по методу проекции градиента, [4]. Результатом вычислений в итерационном процессе является оптимальное решение, обеспечивающее минимум функционалу цели оптимизации [5] и является искомым оптимальным параметром регулирования, что физически соответствует выбранному положению дрена или откачиваемому объему воды [3, 5].

### **Результаты**

В качестве примера расчетов на рис. 1. приводится осушение объекта защиты на территории Новгородского Кремля - получено оптималь-

ное положение дрен при позволительном осушении подвала [5]. При этом культурный слой максимально не осушен.



**Заключение.** Программно-вычислительный комплекс, реализующий описываемые модели позволяет в имитационном режиме решать следующие задачи [1, 5] прогнозировать и оценивать потенциальную и фактическую подтопляемость объектов техносферы (по превышению их критических уровней), вырабатывать и оценивать в имитационном режиме варианты работы дренажных систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арефьева Е.В., Мухин В.И. Оценка территориальной безопасности при подтоплении. – М., АПГС МЧС России, 2008. – 101с.
2. Дзекцер Е.С. Закономерности формирования подтопления застраиваемых территорий, принципы прогнозирования и инженерной защиты. -М.: 1987.- 77 с.
3. Арефьева Е.В. Регулирование режима грунтовых вод при подтоплении объектов и застроенных территорий // Промышленное и гражданское строительство. - 2007. - №11. - С. 47-48.
4. Васильев Ф.П. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1987. - 397 с.
5. Арефьева Е.В. Ситуационно-оптимизационная модель определения опасностей для застроенных территорий / Арефьева Е.В. , Зиганшин А.И., Рыбаков А.В. Научные и образовательные проблемы гражданской защиты, научный журнал. – №1, 2012. – С. 31–37.

УДК 519.6, 517.95

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДА**

А.А. Афанасьева, А.В. Старченко

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [anna.afanaseva@stud.tsu.ru](mailto:anna.afanaseva@stud.tsu.ru)

***Аннотация.** Суть обратной задачи электроимпедансной томографии (ЭИТ) заключается в определении распределения проводимости, зная пропускаемый ток и распределение потенциала. В работе используется метод реконструкции, основанный на алгоритме Левенберга-Марквардта. Метод реализован численно для двумерного случая, и алгоритм протестирован на простой модели с двумя концентрическими вставками.*

***Ключевые слова.** Электроимпедансная томография, алгоритм Левенберга-Марквардта, полная электродная модель.*

## **NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE EIT PROBLEM USING THE LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM**

A.A. Afanasyeva, A.V. Starchenko

National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [anna.afanaseva@stud.tsu.ru](mailto:anna.afanaseva@stud.tsu.ru)

***Abstract.** The essence of the inverse problem of electrical impedance tomography (EIT) is to determine the conductivity distribution, knowing the transmitted current and potential distribution. In this paper, a reconstruction method based on the Levenberg-Marquardt algorithm is used. The method is implemented numerically for the two-dimensional case, and the algorithm is tested on a simple model with two concentric inserts.*

***Keywords.** Electrical impedance tomography, Levenberg-Marquardt algorithm, complete electrode model.*



**Введение.** Электроимпедансная томография (ЭИТ) представляет собой метод визуализации, который является неинвазивным, безрадиационным и экономически эффективным для восстановления электрических свойств в закрытой области на основе поверхностных измерений. Процесс включает подачу электрического тока на набор электродов для измерения напряжения на гладкой поверхности объекта. Для обратной задачи ЭИТ сложно восстановить надежные и разрешимые изображения электропроводности, поскольку она нелинейна и некорректна.

**Постановка задачи.** После аппроксимации дифференциальной задачи мы получим разностную схему вида:

$$A_h(\sigma_h)u_h = b_h(\bar{I}), \quad (1)$$

здесь  $A_h(\sigma_h)$  – матрица коэффициентов разностной схемы,  $A_h \in R^{N \times N}$ ,  $N$  – количество узлов неструктурированной сетки;  $b_h(\bar{I})$  – правая часть разностной схемы, зависящая от выбранной токовой конфигурации  $\bar{I}$ ,  $\sum_{l=1}^L I_l = 0$ ;  $u_h$  – численное решение – потенциал электрического тока, который является решением разностной схемы.

Обычно, при известной, токовой конфигурации искомой величиной наряду с потенциалом электрического тока является значения напряжения на внешней поверхности электродов, которые с учетом полной электродной модели, определяются из дискретного аналога следующего условия:  $U_l = \frac{1}{E_l} \int_{E_l} u ds + \frac{z_l I_l}{E_l}$ , которое можно переписать с учетом

(1) в виде:  $U_l = P_l u_h + d_l$ . Здесь  $\{U_l\}_{l=1}^L$  – искомые напряжения на электродах;  $\{E_l\}_{l=1}^L$ ,  $\{z_l\}_{l=1}^L$ ,  $\{I_l\}_{l=1}^L$  – площадь поверхности, сопротивление и приложенная сила тока для  $l$ -го электрода;  $d_l = \frac{z_l I_l}{E_l}$ ;  $P_l$  – это вектор-

строка, имеющая ненулевые значения для своих компонентов, совпадающих с коэффициентами квадратурной формулы трапеций для ин-

теграла  $\frac{1}{E_l} \int_{E_l} u ds, l=1, \dots, L$ . В итоге логично записать:  $\bar{U} = Pu_h + \bar{d}$ , где

$P$  - матрица из  $L$  строк,  $P_l, l=1, 2, \dots, L$ .

Таким образом, при решении прямой задачи ЭИТ известно:  $\sigma_h, \bar{I}, A_h(\sigma_h), b_h(\bar{I}), \bar{z}, \bar{E}, \bar{D}$  - область исследования и место приложенных электродов.

Решая СЛАУ:

$$A_h(\sigma_h)u_h = b_h(\bar{I}, \bar{z}, \bar{E}),$$

находим  $u_h$  и затем  $\bar{U} = Pu_h + \bar{d}$ .

Заметим, что среди уравнений или ко всем уравнениям системы (1) должно быть добавлено уравнение:  $0 = \sum_l P_l u_h + \sum_l d_l$ , обеспечивающее единственное решение (1) [1].

Сформулируем обратную задачу ЭИТ в полной электродной постановке. Нам известно: область объекта  $\bar{D}$  и места крепления электродов на границах этой области, размеры электродов  $\bar{E}$ , их сопротивления  $\bar{z}$ , а также «измерения» напряжения на электродах  $v^\mu, \mu=1, \dots, M$  - количество измерений при известных токовых конфигурациях  $\bar{I}^\mu$ .

Требуется найти распределение электрической проводимости внутри области исследования  $\sigma_h$ . В ячейках вблизи границы значения  $\sigma$  - известны. Для решения этой задачи воспользуемся итерационным алгоритмом Левенберга-Маркварда [2].

Рассмотрим вектор невязки

$$\bar{r}^\mu = \bar{U}^\mu - \bar{v}^\mu, \mu = 1, \dots, M.$$

Здесь  $\bar{U}^\mu$  - рассчитанное из решения прямой задачи при некотором  $\sigma_h$  и  $\bar{I}^\mu$  значения напряжения на электродах. Нужно составить итерационную процедуру для нахождения такого распределения  $\sigma_h$ ,

когда целевая функция  $f(\sigma_h) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M (\bar{r}^\mu, \bar{r}^\mu)$  имеет глобальный минимум. Заметим, что во время итерационной процедуры  $\sigma_h > 0$ .

В соответствии с итерационным методом Левенберга-Маркварда  $\sigma_h^{(k+1)} = \sigma_h^{(k)} - (H + \lambda_k B)^{-1} \nabla f$ ,  $k = 0, 1, 2$  - номер итерации,  $T$  - количество треугольников,  $B \in R^{T \times T}$  - единичная матрица,  $H \in R^{T \times T}$  - матрица Гессе,  $\lambda_k = \frac{\lambda_{k-1}}{2}$ , если факторизация Холецкого для  $H + \lambda_k B$  может быть реализовано численно, иначе  $\lambda_k = 4\lambda_{k-1}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Somersalo E. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography/ Somersalo E, Cheney M., Isaacson D. //SIAM J. Appl. Math. 1992, V.52. P.1023–1040.
2. Li J. Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography / Li J., Yuan Y. // Applied Mathematical Modelling. – 2009. – №33, P.2175–2186.

УДК 531-14, 531.113.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ СВОБОДНО ПАДАЮЩЕГО ТЕЛА В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

С.Б. Богданова, С.О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра «Прикладные программные средства и математические методы»

Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4, 125993

E-mail: sonjaf@list.ru

**Аннотация.** С помощью естественного трехгранника кривой построена система дифференциальных уравнений, описывающая траекторию свободного падения в неинерциальной системе отсчета, ортами которой служат единичные вектора касательной  $\tau$ , нормали  $\mathbf{n}$  и бинормали  $\mathbf{b}$  к кривой. С помощью компьютерного моделирования построены соответствующие траектории при условии, что система  $\tau - \mathbf{n} - \mathbf{b}$  равномерно вращается по окружности, лежащей в той или иной координатной плоскости.

**Ключевые слова.** Естественный трехгранник кривой, формулы Френе, абсолютное и относительное движение, неинерциальная система отсчета.

## THE RESEARCH OF THE TRAJECTORY FOR FREE FALLING BODY IN THE NONINERTIAL FRAME OF REFERENCE

S.B. Bogdanova, S.O. Gladkov

Moscow Aviation Institute (National Research University)  
Russia, Moscow, Volokolamskoe shosse, 4

**Abstract.** Using the natural trihedral of the curve, the system of differential equations has been built. The system is describing the trajectory for free falling body in the noninertial frame of reference, the unitary vectors of which are the unit tangent vectors  $\tau$  and normal line  $\mathbf{n}$  and optical axis  $\mathbf{b}$  are to the curve. Due to the computer modelling, it has been built proper trajectories provided that the system  $\tau - \mathbf{n} - \mathbf{b}$  is rotating on a circle in a smooth manner, lying in one or another coordinate plane.

**Keywords.** *Natural trihedral of the curve, Frenet formulas, absolute motion and relative motion, noninertial frame of reference.*

**Введение.** Движение тела однозначно определяется влиянием на него внешних сил, однако вид траектории движения существенно зависит от выбранной системы координат [1]. В настоящем сообщении продолжены на пространственный случай результаты работы [2], в которой был определен вид траектории свободно падающего тела для двумерной неинерциальной системы отсчета, расположенной в плоскости падения тела.

**Постановка задачи.** Пусть неинерциальная система отсчета, ортами которой являются единичные вектора касательной  $\boldsymbol{\tau}$ , нормали  $\mathbf{n}$  и бинормали  $\mathbf{b}$  к окружности  $\mathbf{R}_0(t) = R \cos(\omega t) \cdot \mathbf{i} + R \sin(\omega t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$  движется со скоростью  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}_0(t) = v(t) \cdot \boldsymbol{\tau} = R_0 \omega(t) \cdot \boldsymbol{\tau}$  (рис.1). Наблюдатель, находящийся в центре  $O'$  этой системы, видит свободно падающее из точки  $M$  тело. Задача состоит в определении его траектории с точки зрения наблюдателя.

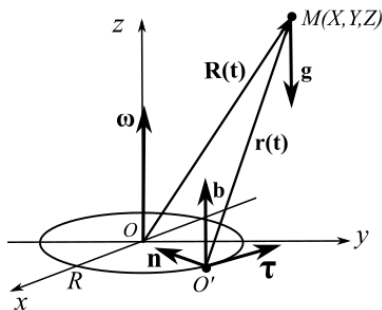


Рис. 1. Геометрия задачи.  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{OO}'$ .

Повторное дифференцирование очевидного равенства  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t)$  с учетом второго закона Ньютона  $\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{g}$  и формул Френе [3]

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = vK\mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}} = -vK\boldsymbol{\tau} - \frac{v}{T}\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}} = \frac{v}{K}\mathbf{n},$$

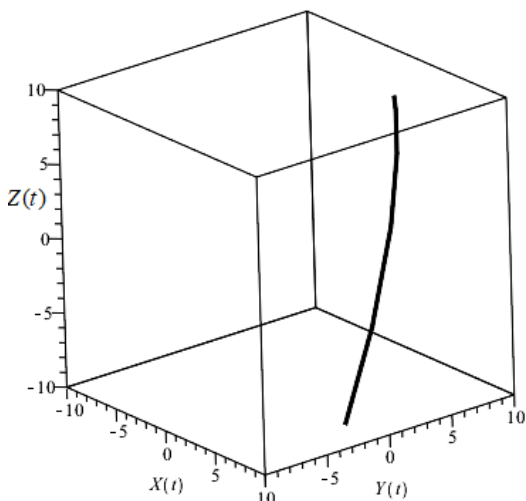
где  $K$  - кривизна кривой, а  $1/T$  - ее кручение, которое для плоской кривой равно нулю, позволяет аналитически решить поставленную задачу в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\dot{v} + 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + YK\dot{v}, \\ \ddot{Y} = -v^2K - 2\dot{X}vK - XK\dot{v} + Yv^2K^2, \\ \ddot{Z} = -g, \end{cases} \quad (1)$$

где  $X, Y, Z$  - координаты падающего тела в системе  $\tau - \mathbf{n} - \mathbf{b}$ ,  $g$  - ускорение свободного падения. Аналогично можно получить уравнения для системы  $\tau - \mathbf{n} - \mathbf{b}$ , движущейся по окружности в плоскости  $XOZ$  или  $YOZ$ :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \cos(\omega t) - \dot{v} + 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + YK\dot{v}, \\ \ddot{Y} = g \sin(\omega t) - v^2K - 2\dot{X}vK - XK\dot{v} + Yv^2K^2, \\ \ddot{Z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

**Результаты.** На рисунке 2 приведено решение системы (1), т.е. вид траектории свободно падающего тела из центра системы  $\tau - \mathbf{n} - \mathbf{b}$ , движущейся равномерно со скоростью  $v = 2$  по окружности с кривизной  $K = 0,4$ .



*Рис. 2. Решение системы(1) получено при начальных условиях*

$$X(0) = Y(0) = 5, Z(0) = 10, X'(0) = Y'(0) = Z'(0) = 0.$$

Моделирование системы (2) показало, что траектория свободно падающего тела в этом случае будет плоской кривой, что и следовало ожидать.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
2. Богданова С.Б., Гладков С.О. К вопросу о траекториях движения тел в неинерциальных системах отсчета // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж, 2022. – С. 12 – 17.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – М.: Наука, 1966. – 551 с.

УДК 531.19::544.275.2::536.777::517.972.5+519.651::519.213.5::519.6

**ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВАРИАНТОВ АППРОКСИМАЦИЙ  
БИНАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РАСЧЁТОВ  
ФУНКЦИОНАЛА СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ПРОСТОЙ  
ЖИДКОСТИ**

Е.С. Бриков

Индивидуальный частный исследователь

E-mail: [esbriov@gmail.com](mailto:esbriov@gmail.com)

***Аннотация.** Рассматриваются версии использования аппроксимаций бинарной корреляционной функции, которые используют наборы: нецентральных распределений хи-квадрат с двумя степенями свободы; функций Эрмита; основанные на квазикристаллическом подходе для целей выполнения структурного анализа и вычислений согласованных термодинамических свойств простых жидкостей.*

***Ключевые слова.** Вариационный принцип равновесной статистической механики, параметризации функциями нецентральные хи-квадрат и Эрмита.*

**EXPERIENCE OF USING VARIANTS OF BINARY  
CORRELATION FUNCTIONS APPROXIMATIONS  
FOR CALCULATIONS OF FREE ENERGY FUNCTIONAL  
OF SIMPLE LIQUIDS**

E.S. Brikov

Individual private researcher

E-mail: [esbriov@gmail.com](mailto:esbriov@gmail.com)

***Abstract.** Versions of usage of the binary correlation function approximations that use sets of: non-central chi-square distributions with two degrees of freedom; Hermit's functions; based on a quasi-crystalline model approach for purposes of carrying-out of a structural analysis and calculations of consistent thermodynamic properties of simple liquids.*

***Keywords.** Variational principle of equilibrium statistical mechanics, parametrization by functions of non-central chi-square and Hermit.*



**Введение.** Несмотря на наблюдаемый существенный прогресс моделирования и выполненных расчётов по решётке с перспективой микроскопического моделирования наиболее часто встречающихся в природе и, поэтому, наиболее интересных неравновесных процессов вдалеке от статистического равновесия [1], для микроскопического изучения процессов вблизи равновесия не потеряли актуальность алгоритмы равновесной аналитической статистической механики [1,2].

Боле того, в целях более последовательного изучения профессионалами подчёркивается важность теоретического изучения статистических систем с учётом короткодействующих отталкивающих потенциалов взаимодействия «из первых принципов» [1].

**Постановка задачи.** Опираясь на касательное преобразование производящего функционала основывающегося на конфигурационном интеграле, также используя теорему о потенциальном функционале, определяется функционал удельной свободной энергии  $f(\rho_1(i), T | M_2(1,2))$ , зависящий, помимо унарной плотности  $\rho_1(i)$  и температуры  $T$ , ещё от функциональной переменной: бинарной мультипликативной корреляционной функции  $M_2(1,2)$  (с пренебрежением вклада более старших мультипликативных корреляционных функций в однородном по плотности случае) [2, 3].

### **Результаты**

Многоцентровые интегрирования в диаграммных членах функционала удельной свободной энергии при параметризациях бинарной функции распределения  $F_2(r)$  наборами: нецентральных распределений хи-квадрат с двумя степенями свободы [2-4]; функциями Эрмита [3] (основанных на квазикристаллическом подходе), приводят к более удобным алгоритмам с суммированиями функций обладающих симметриями и поддающимися, в развитие метода, табулированию [3].

Результаты оценочных сравнений высот 1-ого структурного максимума радиальных функций распределения  $F_2(r)$  (бинарных плотностей), параметризованных нецентральными распределениями хи-квадрат с двумя степенями свободы [2-4], оценённых по прямому вариационному методу функционала удельной свободной энергии в гиперцепном приближении (HNC), с полученными из экспериментов по молекулярной динамике [5] представлены в Табл. №1 [2, 3].

Таблица 1

Оценочные сравнения высот 1-ого структурного максимума радиальных функций распределения  $F_2(r)$ , в подходах (см. в [2,3,5]).

| Сравнение,<br>№ п/п | Прямой вариационный метод с использованием предлагаемых [2,3] параметризаций $M_2(r)$ |        |            | Метод молекулярной динамики [5] для $F_2(r) = M_2(r) + 1$ |      |        |            |
|---------------------|---|--------|------------|---|------|--------|------------|
|                     | T   | $\rho$ | $h_{\max}$ | $h_{\max}$  | T    | $\rho$ | $r_{\max}$ |
| 1.                  | 2.64  | 0.85   | 1.21       | 2.22  | 2.75 | 0,835  | 1.038      |
| 2.                  | 2.68  | 0.55   | 0.82       | 1,754   | 2,75 | 0.55   | 1.07       |

**Заключение.** Несмотря на весьма удобный (квазикристаллический) параметрический вид  $F_2(r)$  в разложениях по предложенным функциям [2-4] и достаточно очевидные алгоритмы вычислений (подробно см. в [2,3]), для получения ценных научных результатов необходимо проведение вычислений большего объёма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Walecka, J. (2004) Theoretical nuclear and subnuclear physics. Singapore, London: Imperial College Press and World Scientific Publishing. DOI: 10.1142/5500.
2. Аринштейн Э.А. Прямой вариационный метод в теории жидкости // ТМФ. – 2004. – Т. 141., № 1. – С. 152–160. DOI: 10.4213/tmfl09.
3. Brikov, E.S. (2023) On a variational principle for equilibrium free energy functional of simple liquids. *In* Integral Methods in Science and Engineering, C. Constanda et al. (eds.), Springer International Publishing, Cham, In press, DOI: 10.1007/978-3-031-34099-4\_5.
4. Press, S.J. (1966). Linear Combinations of Non-Central Chi-Square Variates. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 37, No. 2, pp. 480-487. DOI: 10.1214/aoms/1177699531.
5. Johnson, J., Zollweg, J., & Gubbins, K. (1993). The Lennard-Jones equation of state revisited. Mol. Phys., 78(3), pp. 591-618. DOI:10.1080/00268979300100411.

УДК 550.38

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЖИМОВ ГИДРОМАГНИТНОГО ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ**

И.В. Бычин<sup>1,2</sup>, А.В. Гореликов<sup>1,2</sup>, А.В. Ряховский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Сургутский филиал Федерального государственного учреждения  
«Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт  
системных исследований Российской академии наук»,  
Россия, г. Сургут, ул. Энергетиков, 4, 628408

<sup>2</sup> Сургутский государственный университет,  
Россия, г. Сургут, пр. Ленина, 1, 628412

E-mail: bychin\_iv@surgu.ru

***Аннотация.** В рамках модели резистивной магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости проведено численное исследование гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое, в зависимости от начальных условий и числа Релея. Получен ряд квазистационарных решений, в которых реализуется устойчивый уровень энергии генерируемого магнитного поля. Расчёты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода, в котором использована технология CUDA для гибридных вычислительных систем с графическими процессорами.*

***Ключевые слова.** Магнитная гидродинамика, гидромагнитное динамо, геодинамо.*

**Введение.** Значительный интерес представляет изучение влияния начальных условий и набора определяющих задачу параметров на структуру течения и топологию магнитного поля в задаче геодинамо [1]. В данной работе численно исследуется влияние начальных условий, а также числа Релея на структуру и характеристики квазистационарных решений задачи геодинамо.

**Постановка задачи.** В стандартной для данной области исследований постановке рассматривается задача гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое с твердым проводящим ядром и вакуумными условиями для магнитного поля на внешней границе [2, 3]. Математическая модель соответствует модели геодинамо из работы [3].

Рассматриваются следующие начальные условия [3]  $r_i < r < r_o$ ,  $\tau = 0$ :

$$\mathbf{u} = 0, \quad \theta = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{21}{\sqrt{17920\pi}} (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) \sin^4 \theta \cos(m\varphi),$$

где  $x = 2r - r_i - r_o$ , волновое число  $m$  – параметр, который определяет азимутальную симметрию начального поля температуры;

$$0 \leq r < r_o, \tau = 0:$$

$$B_r = 5 \frac{4r_o - 3r}{3 + r_o} \cos \theta, \quad B_\theta = 5 \frac{9r - 8r_o}{2r_o + 6} \sin \theta, \quad B_\varphi = 5 \sin\left(\pi \frac{r}{r_o}\right) \sin 2\theta.$$

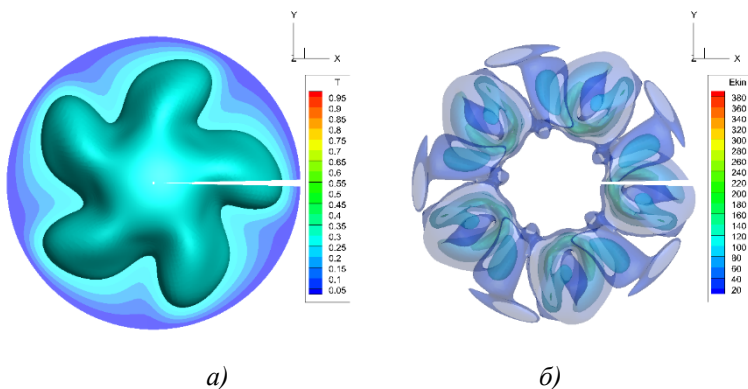


Рис. 1. а) Изоповерхность температуры ( $\theta = 0.25$ );  
б) Распределение кинетической энергии

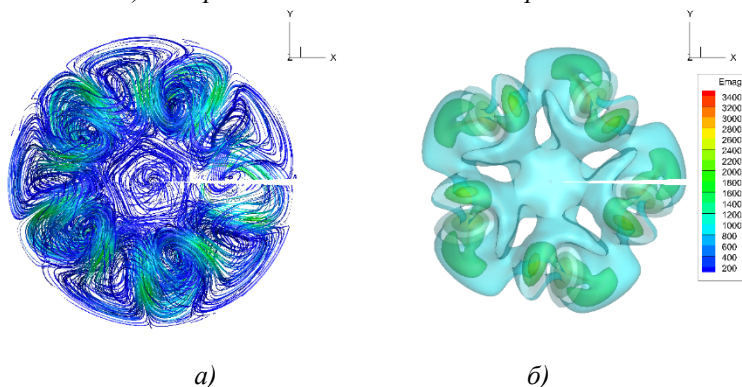


Рис. 2. а) Структура квазистационарного течения;  
б) Изоповерхности магнитной энергии

**Результаты.** Расчеты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода [4-6] ориентированного для работы на вычислительных системах с графическими ускорителями. Проведено три серии вычислительных экспериментов по исследованию зависимости режимов генерации магнитного поля от модифицированного числа Рэлея  $Ra^*$ , при волновых числах  $m = 3, 4, 5$ , числе Экмана  $E = 10^{-3}$ , числе Прандтля  $Pr = 1$  и магнитном числе Прандтля  $Pm = 5$ . Расчеты проведены методом продолжения по параметру. На Рис. 1–2 представлены некоторые результаты для  $m = 5$  и  $Ra^* = 120$ , демонстрирующие пятилучевую симметрию квазистационарного решения.

**Заключение.** Получен ряд различных квазистационарных решений задачи гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое с вакуумными граничными условиями, в которых реализуется устойчивый уровень энергии генерируемого магнитного поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Petitdemange L. Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2018; 277: 113–132. DOI: 10.1016/j.pepi.2018.02.001.
2. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. – 2000. – Vol. 358. – P. 873–897.
3. Christensen, U.R. Numerical dynamo benchmark / U.R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin [et al.] // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. – 2001. – Vol. 128. – P. 25–34.
4. Бычин И.В., Гореликов А.В., Ряховский А.В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2020. – № 64. – С. 15–30.
5. Бычин И.В., Гореликов А.В., Ряховский А.В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах // *Успехи кибернетики*. 2022. Т. 3, № 2. С. 60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.
6. Бычин И.В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо // *Успехи кибернетики*. – 2021. – Т. 2. – № 1. – С. 6–13.

УДК 536.245

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА «РОМБ» ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

В.Д. Гольдин

НИИ прикладной математики и механики Томского  
государственного университета,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: vdg@math.tsu.ru

**Аннотация.** Рассматривается развитие метода «Ромб» на случай расчета трехмерного теплового поля в твердом теле с учетом термического разложения и фильтрации газа. С помощью разработанного метода проводится расчет распространения тепла в составном теплозащитном покрытии летательного аппарата, подвергающегося аэродинамическому нагреву при движении в атмосфере со сверхзвуковой скоростью по заданной траектории.

**Ключевые слова.** Теплоперенос, численные методы, разностные схемы, сверхзвуковое обтекание, аэродинамический нагрев, фильтрация, термическое разложение.

**Введение.** Рассматривается трехмерное распространение тепла внутри затупленного тела (рис. 1), подвергающегося аэродинамическому нагреву при сверхзвуковом обтекании; при этом учитывается возможное термическое разложение материалов с фильтрацией газообразных продуктов пиролиза.

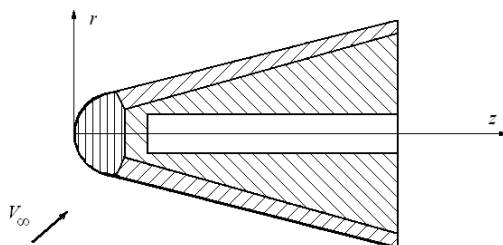


Рис. 1. Схема внутренней структуры обтекаемого тела

**Постановка задачи.** Задача сводится к решению уравнения переноса тепла, в основе которого лежит уравнение теплопроводности, дополненное конвективными членами [1]. При наличии внутри тела пористых областей, в которых происходит термическое разложение материала, добавляется обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее одностадийную кинетику разложения и одномерное уравнение для определения потока массы фильтрующихся газообразных продуктов разложения. При этом предполагается, что вектор диффузионного потока имеет только одну компоненту, направленную по нормали к нагреваемой поверхности. Граничными условиями для уравнения переноса тепла служат условие 3-го рода на внешнем контуре тела и условия теплоизоляции на всех остальных границах.

**Разностная схема.** Система разностных уравнений для уравнения переноса тепла строится на основе метода «Ромб» [2], который распространен на трехмерный случай и учет конвективного теплопереноса. Используется структурированная сетка с 6-гранными ячейками произвольной формы (рис. 2). Каждая ячейка преобразуется в куб с помощью 3-линейного перехода к локальным координатам. Уравнение переноса тепла и векторное соотношение между тепловым потоком и градиентом температуры интегрируются по ячейке. После преобразований интегралов к алгебраическим соотношениям на каждом шаге по времени получается система уравнений, в которой неизвестными являются значения температуры и 3 компоненты вектора потока тепла в центре каждой ячейки и на её гранях. При этом значения неизвестных на гранях вычисляются как среднее арифметическое значений в центрах соседних ячеек.

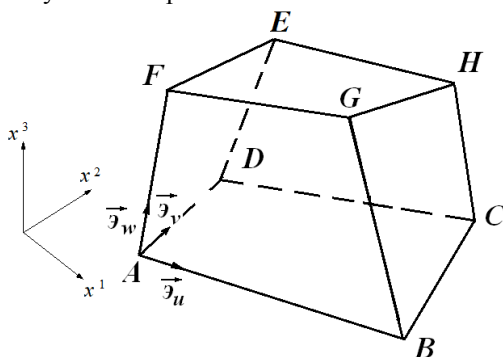
Полученная неявная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени, абсолютно устойчива, условно монотонна и может применяться для областей со сложной структурой.

Достоинствами метода является то, что он является консервативным и позволяет одновременно с определением температуры определить также тепловые потоки, не привлекая апостериорных аппроксимаций.

Полученная система разностных уравнений решается с помощью метода расщепления со стабилизирующей поправкой [2]. На каждом шаге расщепления используется одномерная двухточечная разностная схема; при этом решение получается с помощью специального метода прогонки.

**Результаты.** Представленный метод протестирован путем сравнения результатов с трехмерными нестационарными аналитическими решениями.

Он применяется для определения нестационарного теплового режима многосоставного теплозащитного покрытия тела, подвергающегося аэродинамическому нагреву при движении в атмосфере Земли с большой сверхзвуковой скоростью.



*Рис. 2. Схема разностной ячейки*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зинченко В.И., Гольдин В.Д., Зверев В.Г. Исследование характеристик тепломассообмена теплозащитных материалов при больших временах полета // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59. № 2 (348). – С. 108-120.
2. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 5. – С. 1288 – 1303.



УДК 539.42; 539.4.015

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
МНОГОМАСШТАБНОЙ ПОРОВОЙ СТРУКТУРЫ  
НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЕРАМИЧЕСКИХ  
ОГНЕУПОРОВ НА ОСНОВЕ  $\text{SiO}_2$**

А.С. Григорьев<sup>1</sup>, Е.В. Шилько<sup>1,2</sup>, А.И. Дмитриев<sup>1,2</sup>, А.В. Заболотский<sup>3</sup>,  
К.П. Андреев<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
Россия, г. Томск, пр. Академический, 2/4, 634055

<sup>2</sup>Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>3</sup>ООО «Группа «Магнезит», г. Сатка, ул. Солнечная, д. 34, 456910

<sup>4</sup>Wuhan University of Technology,  
122 Luoshi Road, Hongshan District, Wuhan, China, 430070

E-mail: grigoriev@ispms.ru

***Аннотация.** Работа посвящена численному исследованию локальных механических свойств пористых керамических огнеупоров на основе  $\text{SiO}_2$ . Получены упругие и прочностные характеристики пористых образцов огнеупора в зависимости от пористости и морфологии порового пространства. Получены оценки доли планарных микродефектов в структуре огнеупора.*

***Ключевые слова.** Огнеупоры, Пористость, Прочность, Метод дискретных элементов.*

**NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF MULTISCALE  
PORE STRUCTURE PARAMETERS ON THE MECHANICAL  
PROPERTIES OF SILICA REFRACTORIES**

A.S. Grigoriev<sup>1</sup>, E.V. Shilko<sup>1,2</sup>, A.I. Dmitriev<sup>1,2</sup>, A.V. Zabolotskiy<sup>3</sup>,  
K.P. Andreev<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS,  
Russia, Tomsk, 2/4, pr. Akademicheskii, 634055

<sup>2</sup>Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

<sup>3</sup>Magnezit Group, Russia, Satka, st. Solnechnaya, 34, 456910

<sup>4</sup>Wuhan University of Science and Technology, 122 Luoshi Road,  
Hongshan District, Wuhan, China, 430070

**Abstract.** *The paper is devoted to the numerical study of the local mechanical properties of porous ceramic refractories based on SiO<sub>2</sub>. The elastic and strength characteristics of porous refractory samples are obtained depending on the porosity and morphology of the pore space. Estimates of the proportion of planar microdefects in the refractory structure are obtained.*

**Keywords.** *Refractories, Porosity, Strength, Discrete Element Method.*

**Введение.** Прочностные характеристики керамик определяются как фазовым составом материала, так и, в значительной степени, особенностями его структуры. Контроль параметров поровой структуры является одним из эффективных способов управления прочностными и упругими свойствами огнеупорных керамик. Поэтому целью данной работы было изучение зависимости основных механических характеристик огнеупора от величины пористости и особенностей структуры порового пространства на микро- и мезомасштабном структурном уровне. Исследования проводились путем численного моделирования с использованием метода однородно деформируемых дискретных элементов. В рамках этого метода материал представляется набором связанных дискретных элементов, а локальное разрушение материала моделируется разрывом межэлементных связей согласно заданному критерию. Детали метода и применяемой модели локально изотропных хрупких материалов приведены в работах авторов.

**Постановка задачи.** В работе рассматривались фрагменты пористого огнеупора, состоящие преимущественно из мелкодисперсных фракций SiO<sub>2</sub> (<100 мкм). Исследовалось механическое поведение высокопористых фрагментов огнеупора в условиях квазистатического сжатия и растяжения. Двухмасштабная пористая структура учитывалась явным образом путем удаления дискретных элементов из структуры образцов («мезоскопическая» пористость) и задания некоторой доли несвязанных (контактирующих) пар дискретных элементов («микроскопическая» пористость). Рассмотрены образцы с мезоскопической пористостью двух типов: 1) с полностью изолированными округлыми порами (пористость «закрытого» типа); 2) с протяженными сообщающимися порами нерегулярной формы (пористость «канального» типа). Моделирование осуществлялось в двумерной постановке в приближении плоского напряженного состояния.

**Результаты.** Получены зависимости прочности и модуля Юнга образцов с различной морфологией поровой структуры от величины пористости. Показано, что нормированный модуль Юнга модельных образцов огнеупора с закрытым типом пористости показывает хорошее согласие с экспериментальными данными для прочих пористых керамик. В случае закрытой структуры пор зависимость для модельных образцов практически совпадает с экспериментальной. В то же время зависимость для канальной структуры пор имеет существенно более крутой наклон.

Анализ результатов моделирования показал, что только образцы с высоким содержанием планарных микродефектов (>30%) могут обладать значениями прочности и модуля Юнга, согласующимися с экспериментальными значениями для спеченных образцов из мелкозернистых фракций SiO<sub>2</sub>. Дополнительные исследования показали, что при содержании микродефектов >40% в каркасе происходит своеобразный «перколяционный переход», а именно величина предела прочности на сжатие катастрофически снижается. Это ограничивает область параметров многомасштабной пористости следующим интервалом: мезоскопическая пористость около 40%, концентрация микродефектов около 25%. Данные значения могут использоваться как средние характеристики дефектности (пористости) мезомасштабных областей, образованных конгломератами мелких зерен SiO<sub>2</sub>.

**Заключение.** Результаты численного исследования показали, что предложенная двухмасштабная модель огнеупорной керамики на основе SiO<sub>2</sub> позволяет адекватно описать механическое поведение огнеупора и оценить локальные механические свойства.

Планарные микродефекты, располагающиеся преимущественно вблизи границ раздела зерен, вносят существенный вклад в механическое поведение огнеупора, несмотря на то, что вклад таких дефектов в общую пористость невелик по сравнению с мезоскопическими порами.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>.*

УДК 519.6:532.4

## **ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РАСТИТЕЛЬНОСТИ В МИКРОМАСШТАБНЫХ МОДЕЛЯХ**

Е.А. Данилкин, А.В. Старченко, Д.В. Лещинский, К.В. Юмин

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: ugin@math.tsu.ru

***Аннотация.** Разработана численная модель для исследования влияния растительности на турбулентное течение и перенос примеси в уличном каньоне. Выполнена верификация построенной модели на задаче обтекания лесополосы. Модель разработана для выполнения исследования распространения выбросов автотранспорта в городских кварталах и уличных каньонах с учетом влияния растительности.*

***Ключевые слова.** Уравнения Рейнольдса, вихререзающее моделирование, параметризация растительности, уличный каньон, перенос примеси.*

## **VEGETATION PARAMETERIZATION IN MICRO-SCALE MODELS**

E.A. Danilkin, A.V. Starchenko, D.V. Leshchinskiy, K.V. Jumin

National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: ugin@math.tsu.ru

***Abstract.** A numerical model has been developed to study the influence of vegetation on the turbulent flow and the impurity transport in a street canyon. The constructed model was verified on the problem of flow around a forest belt of coniferous trees. The model was developed to study the distribution of vehicle emissions in urban areas and street canyons, taking into account the influence of vegetation.*

***Keywords.** Reynolds equations, large eddy simulation, parameterization of trees, street canyon, air pollutant transport.*

**Введение.** В качестве важных параметров, влияющих на структуру течения и механизм распространения примеси в городской среде, среди прочих выделяют деревья и живые изгороди. Растительность изменяет энергетический баланс городской поверхности и создает более комфортные условия пребывания на улице в летний период. Деревья оказывают уникальное влияние на микроклимат, они обеспечивают тень для пешеходов, изменяют локальный радиационный обмен, воздушные потоки и конвективный обмен. На данный момент можно выделить два основных подхода к моделированию влияния растительности при изучении течений в городских районах: модель длины шероховатости и модель навеса.

Модель шероховатости учитывает морфологию деревьев, что является важным фактором, влияющим на механизмы взаимодействия. Изменяя аэродинамические характеристики можно задавать растительность разной плотности листового покрова, основываясь лишь на морфометрическом подходе оценки растительности.

В модели навеса рассматривается сила, действующая на жидкость, генерация и рассеивание турбулентности при преодолении потоком препятствий путем введения исходных членов в уравнение движения. Модель дает возможность добавления растительности и пористых препятствий в область исследования, и не требует при этом подробного сеточного покрытия. В то же время возможность детализировать информацию о растительности дает возможность получить более точные результаты по сравнению с моделью длины шероховатости.

Целью данной работы является включение в вихреразрешающую модель турбулентного течения параметризации растительности для расчета детальной ветровой обстановки в городском ландшафте с учетом влияния строений различной этажности, имеющих участки растительности и неоднородности подстилающей поверхности.

Разрабатываемая математическая модель опирается на многомерные нестационарные отфильтрованные уравнения Навье-Стокса для определения полей компонент скорости и давления, а также транспортные уравнения для расчета полей скалярных величин - температуры, концентрации примеси. В качестве турбулентного замыкания используется модель Смагоринского с параметром. Влияние растительности учитывается с помощью дополнительных источников членов в отфильтрованных уравнениях Навье-Стокса.

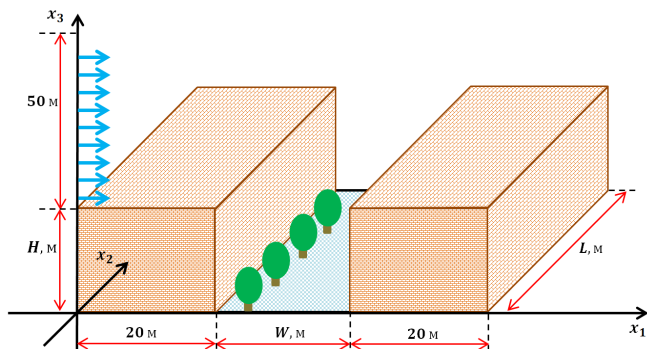


Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи

Корректность работы построенной математической модели проверена на целом ряде тестовых примеров, среди которых: обтекание цилиндра квадратного сечения, течение над шероховатой пластиной [1]. Верификация построенной модели будет проведена на примере обтекания лесополосы [2].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00165).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – 252с.
2. Kimura A., Iwata T., Mochida A., Yoshino H., Ooka R., Yoshida S. Optimization of plant canopy model for reproducing aerodynamic effects of trees: (Part 1) Comparison between the canopy model optimized by the present authors and that proposed by Green // Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan. 2003. V. 9. P. 721-722.

УДК 519.6:004.032.26

## **ПРОГНОЗ СКОРОСТИ ВЕТРА НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**

И.В. Дель, А.В. Старченко

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: irina.del@mail.tsu.ru

***Аннотация.** Реализованы три различные архитектуры нейронных сетей для краткосрочного прогнозирования приземной скорости ветра, а именно: многослойный перцептрон (MLP), рекуррентная нейронная сеть типа Long short-term memory (LSTM) и сверточная нейронная сеть (CNN). Полученные результаты показывают весьма близкую точность прогнозирования с использованием рассматриваемых нейронных сетей.*

***Ключевые слова.** Прогноз скорости ветра, нейронные сети, LSTM, CNN, MLP, метеопараметры.*

## **WIND SPEED FORECAST BASED ON ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS**

I.V. Del, A.V. Starchenko

National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: irina.del@mail.tsu.ru

***Abstract.** Three different neural network architectures for near-surface wind speed short-term forecasting have been implemented, namely, multi-layer perceptron (MLP), Long short-term memory (LSTM) recurrent neural network and convolutional neural network (CNN). Obtained results show a very close prediction accuracy using the neural networks under consideration.*

***Keywords.** Wind speed forecast, neural networks, LSTM, CNN, MLP, meteorological parameters.*

**Введение.** Целью работы является реализация, применение и сравнение различных архитектур нейронных сетей для прогнозирования скорости ветра. По измеренным стационарной метеостанцией историческим значениям температуры, атмосферного давления, относительной влажности, скорости и направления ветра за предыдущие часы поставлена задача предсказать скорость ветра на 3 часа вперед.

**Данные и методы исследования.** Исходные метеорологические данные для исследования были получены с сайта «Расписание погоды» (<http://rp5.ru>) за период времени с 01.01.2014 по 31.12.2021 для аэропорта г. Томск. Размер набора данных  $N = 70128$  ежечасных наблюдений. Из всего набора данных были выбраны временные ряды приземной температуры воздуха, атмосферного давления, относительной влажности, скорости и направления ветра. Выбранные данные были разделены на две выборки: обучающую выборку, соответствующую 80% от основной выборки, и тестовую выборку, соответствующую 20%.

В данной работе рассматривались различные архитектуры нейронных сетей, такие, как многослойный персептрон (MLP), рекуррентные нейронные сети типа Long Short-Term Memory (LSTM) и сверточные нейронные сети (CNN) [1, 2]. Форма ввода для всех архитектур одинакова: 12 временных шагов с 5 параметрами. Каждая архитектура имеет не менее двух скрытых слоев. Выходной слой содержит 3 нейрона (прогнозируемая скорость ветра на 3 часа). Оптимизация целевой функции с подбором весовых коэффициентов осуществляется методом адаптивной инерции Adam (Adaptive Moment Estimation) (вариант стохастического градиентного спуска) [3].

**Результаты.** Качество прогнозирования оценивалось по таким трем метрикам, как средняя абсолютная ошибка  $MAE$ , коэффициент согласия  $IOA$  и коэффициент детерминации  $R^2$ :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|, IOA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|y_i - \bar{d}| + |d_i - \bar{d}|)^2}, R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2},$$

где  $y_i$  – предсказанное выходное значение,  $d_i$  – реальное (наблюдаемое) выходное значение, а  $\bar{d}$  – среднее значение.

Общие значения  $MAE$ , коэффициента детерминации  $R^2$  и индекса согласия  $IOA$  по всему прогнозу приведены в таблице 1. Рекуррентная нейронная сеть типа LSTM дает более точный прогноз чем многослойный персептрон и сверточная нейронная сеть. Но с учетом того,

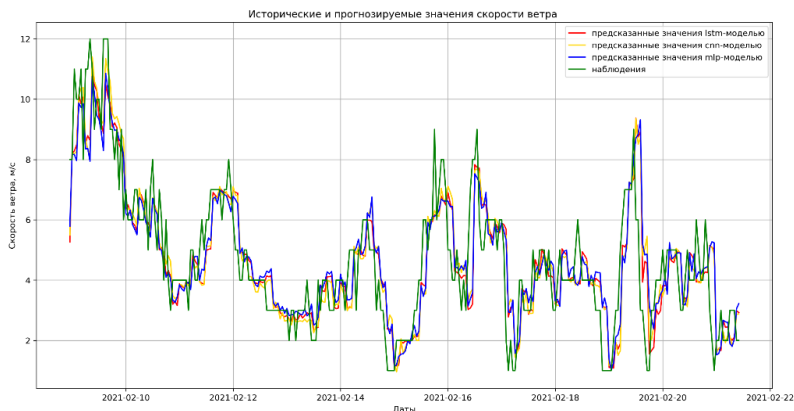


что средняя абсолютная ошибка различается незначительно, результат прогнозирования всех трех архитектур удовлетворительный.

*Таблица 1*  
*Значения метрик для трех архитектур нейронных сетей*

|             | <i>MAE</i> | <i>R<sup>2</sup></i> | <i>IOA</i> |
|-------------|------------|----------------------|------------|
| <b>LSTM</b> | 0,83       | 0,77                 | 0,935      |
| <b>MLP</b>  | 0,84       | 0,77                 | 0,932      |
| <b>CNN</b>  | 0,85       | 0,77                 | 0,935      |

На рис. 1 представлено сравнение графиков фактических и прогнозируемых значений скорости ветра. Из графика видно, что все архитектуры довольно хорошо справляется с предсказанием.



*Рис. 1. Фактическая и прогнозируемая скорость ветра для среза из набора тестовых данных*

**Заключение.** Для достижения цели работы были изучены и реализованы такие нейронные сети, как многослойный перцептрон, рекуррентная нейронная сеть типа LSTM и сверточная нейронная сеть. Сравнительный анализ результатов прогнозирования всех 3-х архитектур, свидетельствует о том, что методы нейросетевого прогнозирования

ния имеют большой потенциал в трудоемких, плохо формализованных задачах, например, как краткосрочный прогноз метеопараметров.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. – М.: Вильямс, 2008. – 1104 с.
2. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. – СПб.: Питер, 2018. – 400 с.
3. Diederik P. Kingma, Jimmy Ba. Adam: A Method for Stochastic Optimization // ICLR 2015. – 2015.

УДК 004.942:519.711.3

## **О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА ПО ДАННЫМ GPS**

Р.Г. Джафаров, М.М. Муталлимов

Бакинский государственный университет,  
Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23, AZ1148

E-mail: r.g.jafarov@gmail.com

***Аннотация.** В предлагаемой работе на базе математической модели движения квадрокоптера рассматривается три различных дискретных линейно-квадратичной гауссовых задач, которых можно решать параллельно независимо друг от друга. В качестве наблюдения используются данные спутниковой навигационной системы GPS.*

***Ключевые слова.** Квадрокоптер, стабилизация, GPS, LQG.*

**Введение.** Благодаря развитию современных математических пакетов прикладных программ в настоящее время разрабатывается различные подходы по управлению и стабилизации движений беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Отметим, что наряду с разработкой математического моделирования и управления движением квадрокоптера, особое место занимает задачи стабилизации и построения оптимальных регуляторов [1]. Во многих работах подразумевается, что все координаты движения летательного аппарата известны или измеряются точно и нет никаких случайных воздействий. А на практике в математической модели присутствуют случайные воздействия и при наблюдении или при измерении имеются случайные ошибки. Поэтому, в данной работе на основе разработанного в [2] алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме решается проблема стабилизации полета квадрокоптером с использованием данных спутниковой навигационной системы GPS.

**Постановка задачи.** Пусть движение объекта описывается уравнение

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i + \omega_i, \quad (1)$$

и во временном состоянии  $i$  проводится измерения  $z_i$ , которые линейно связаны с состоянием траектории  $x_i$

$$z_i = Hx_i + v_i \quad (2)$$

где  $\omega_i$  - вектор случайных внешних возмущений, а  $v_i$  - вектор случайных погрешностей измерений, которые предполагаются гауссовыми случайными величинами типа «белый шум». Кроме того, математические ожидания для случайных величин  $x_0$ ,  $\omega_i$  и  $v_i$  имеют вид

$$E(\omega_i) = E(v_i) = E(x_0) = 0 \quad (3)$$

а корреляционные матрицы определены в виде

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad (4)$$

$$E\{x_0 x_0^T\} = P_0, \quad E\{x_0 v_j^T\} = E\{x_0 \omega_j^T\} = 0 \quad (5)$$

Требуется найти такое управляющее воздействие  $u_i$  как функция от наблюдения  $z_i$ , которое минимизирует квадратичный функционал

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \begin{bmatrix} x_i^T & u_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & N \\ N^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

Для решения линейно-квадратичной гауссовой задачи (1)-(6) в работе [2] предложен следующий алгоритм.

1. Формируются матрицы  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $N$ .
2. Решается матричное алгебраическое уравнение Риккати (МАУР)

$$S = \Phi^T S \Phi - C^T (B + \Gamma^T S \Gamma) C + A \quad (7)$$

и находится его положительно-определенное решение – матрица  $S$ .

3. Решается МАУР

$$M = \Phi M \Phi^T - \Phi M H^T (H M H^T + R)^{-1} H M^T \Phi^T + Q \quad (8)$$

и находится положительно-определенное решение – матрица  $M$ .

4. Формируются матрицы  $C$  из

$$C = (\Gamma^T S \Gamma + B)^{-1} (\Gamma^T S \Phi + N^T) \quad (9)$$

и  $K$  из

$$K = M H^T (H M H^T + R)^{-1}. \quad (10)$$

5. Определяется оптимальная оценка  $\hat{x}_i$  из

$$\hat{x}_{i+1} = [\Phi - K H \Phi] \hat{x}_i + [\Gamma - K H \Gamma] u_i + K z_{i+1}, \quad \hat{x}_0 = 0 \quad (11)$$

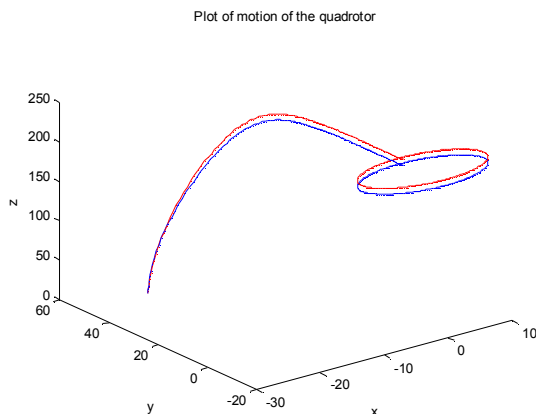
и оптимальный регулятор  $u_i$  из

$$u_i = -C \hat{x}_i. \quad (12)$$

**Результаты.** Сейчас используя математическую модель движения БПЛА [1] и наблюдение через GPS можно свести задачу перемещения из начальной точки  $(x_0, y_0, z_0)$  к заданной точке  $(x_d, y_d, z_d)$  к задаче построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой (ЛКГ). Далее, дискредитируя эту задачу полу-

чим дискретную ЛКГ задачу и к ней применяется вышеизложенный алгоритм.

Данная задача решена для конкретного примера. Предполагается, что информация от спутниковой навигационной системы GPS поступает дискретно и на основе этих данных алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме определяет движение квадрокоптера.



*Рис. 1. График движения квадрокоптера*

**Заключение.** Разработан алгоритм решения линейно-квадратичной гауссовой задачи для стабилизации полета квадрокоптером с использованием данных спутниковой навигационной системы GPS.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Larin V.B., Tunik A.A. Pnytska S.I. Some algorithms for unmanned aerial vehicles navigation - Outskirts, 2020. - 204 p.
2. Муталимов М.М., Джавадов Н.Г., Расулова У.З., Велиева Н.И., Алиев Ф.А. Алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме // Proceedings of IAM. – 2022, Т.11., № 2. - С.113-119.

УДК 539.422.53

## **ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА РЕСУРСА СЛУЖБЫ ОГНЕУПОРНЫХ ИЗДЕЛИЙ**

А.В. Заболотский, А.С. Григорьев, А.И. Дмитриев

ИФПМ СО РАН,

Россия, г. Томск, пр. Академический, 2/4, 634055

E-mail: zabolotsky@bk.ru

***Аннотация.** Предложена численная модель, связывающая микро-структурные параметры огнеупора с последовательностью и скоростью формирования микротрещин, коррелирующими с ресурсом материала. Проведена валидация модели путем сравнения с экспериментальными данными.*

***Ключевые слова.** Керамика, хрупкое разрушение, моделирование, трещина.*

**Введение.** Огнеупорные материалы используются в условиях термомеханических нагрузок, создаваемых градиентным температурным полем. Неоднородная микроструктура материала приводит к формированию особого характера трещинообразования, называемого квазихрупким, отличающимся наличием площадки псевдопластической деформации на диаграмме разрушения, длина которой определяет ресурс материала. Причиной ее возникновения является поэтапный рост микротрещин в матрице материала между элементами структуры, моделирование которого позволяет прогнозировать срок службы огнеупоров.

**Постановка задачи.** Задача сводится к математическому описанию микроструктуры огнеупорного материала и моделированию роста трещины.

Микроструктура огнеупорных материалов представлена относительно крупными зернами, формирующими «каркас» материала, и связующей матрицей, представленной как зернами меньшего размера, так и вязкими фазами (при визуальном осмотре под микроскопом матрица выглядит однородной).

Смеси для производства огнеупорных материалов содержат 8 - 10 фракций порошков разного размера частиц, изменяющегося в пределах 3 порядков величины. Для формирования модели представительного объема таких материалов потребуется рассмотреть около 4 млрд. частиц, что подразумевает привлечение значительных вычислительных

ресурсов. Соответственно, актуальна разработка способа сокращения выборки [1, 2].

При моделировании роста трещины предполагалось, что он происходит путем расходования энергии упругой деформации материала на формирование новой поверхности раздела. Энергия упругой деформации материала может быть выражена через механические напряжения в зоне деформации [3]:

$$U = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2 \cdot E} \quad (1)$$

где  $V$  – объем материала, для которого вычисляется значение энергии,  $\sigma$  – механические напряжения,  $E$  – модуль упругости. Ввиду неоднородности поля напряжений и деформаций для реальных тел, для энергетического расчета использовались численные методы.

**Результаты.** Разработан и валидирован металлографическим исследованием способ определения параметров структуры материала, основанный на методе Монте-Карло, путем расчета расстояния от случайно выбранной точки до центра или поверхности какого-либо элемента структуры. Способ позволяет определять размеры и форму пустот, средние расстояния между частицами различных фракций и т.д. [1,2], которые впоследствии используются для валидации модели и расчета приращения длины трещины в качестве предельных величин, соответственно.

Было проведено экспериментальное исследование [4], а затем моделирование термомеханических напряжений и роста трещин при испытаниях блоков из поликристаллической окиси кремния на термостойкость в условиях воздушного охлаждения после термостатирования при 200 °С. Разрушение материала в условиях эксперимента происходило постепенно с образованием множества трещин [4]. Последовательность образования трещин была проанализирована при помощи метода конечных элементов и введенного ранее градиентного деформационного критерия [5]. Скорость роста трещины моделировалась при помощи энергетического критерия (1), с учетом предположения, что трещина при достижении границы раздела «зерно – матрица» останавливается или меняет направление. Зоны трещинообразования и их сравнительные скорости роста, полученные путем математического моделирования, совпали с экспериментальными данными, приведенными в [4].

**Заключение.** Математическими методами построена численная модель структуры материала, с использованием размеров зерен сырьевых компонентов, которая позволяет определять набор структурных параметров, для расчета локализации и скорости роста трещин. Ре-

зультаты расчета по модели коррелируют с результатами прямых измерений структурных параметров, выполненных металлографическими методами. Использованный энергетический подход и допущение об остановке трещин на границе раздела фаз позволили численными методами определить расположение, последовательность трещинообразования и относительные скорости распространения трещин при термическом разрушении огнеупорного блока, подтвержденные экспериментально.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта № 22-19-00688).*

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Заболотский А.В. Построение и исследование модели поровой структуры керамического материала. //Иновационная наука. № 03-1/2017 с. 27 - 34.
2. Заболотский А.В. Моделирование структуры связки керамического материала как перколяционного кластера второго порядка. Сб. статей междунар. научно-практической конференции . - Уфа. Аэтерна, 2017, с. 67 - 76.
3. Савельев И. В. Курс общей физики. Изд. "Лань", 2020 , 436 с.
4. Andreev K., Tadaion V., Zhu Q., Wang W., Yin Y., Tonnesen T., Thermal and mechanical cyclic tests and fracture mechanics parameters as indicators of thermal shock resistance – case study on silica refractories, Journal of the European Ceramic Society, V. 39, №4, 2019, P. 1650-1659.
5. Григорьев А.С., Данильченко С.В., Дмитриев А.И., Заболотский А.В. и др. Компьютерное моделирование влияния вспомогательных слоев футеровки сталеразливочного ковша на локализацию и направление роста термических трещин.// Новые огнеупоры – 2022, № 10, с. 3 – 15.



УДК 519.63

**ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКОГО КОНВЕКТИВНО-  
ДИФфуЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

В.Г. Зверев

НИИ прикладной математики и механики  
Томского государственного университета,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: zverev@niipmm.tsu.ru

***Аннотация.** Предложена специальная разностная схема для численного решения жесткого конвективно-диффузионного уравнения переноса. Проблема доминирования конвективного члена решена путем перехода к самосопряженной форме уравнения. Для построения разностного аналога уравнения на трехточечном шаблоне используется метод контрольного объема. На тестовых примерах показана высокая эффективность предложенной разностной схемы для решения жестких задач конвективно-диффузионного переноса.*

***Ключевые слова.** Конвективно-диффузионный перенос, разностная схема, метод контрольного объема*

**ON A SPECIAL DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING A RIGID  
CONVECTIVE-DIFFUSION TRANSPORT EQUATION**

V.G. Zverev

Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Ave., 36, 634050

E-mail: zverev@niipmm.tsu.ru

***Annotation.** A special difference scheme for the numerical solution of a rigid convective-diffusion transport equation is proposed. The problem of dominance of the convective term is solved by passing to the self-conjugated form of the equation. To construct a difference analogue of the equation on a three-point template, the control volume method is used. The test examples show the high efficiency of the proposed difference scheme for solving rigid problems of convective-diffusion transport.*

**Key words.** convective-diffusion transfer, difference scheme, control volume method

**Введение.** Математическое описание процессов теплообмена опирается на конвективно-диффузионное уравнение переноса. Основным способом его решения являются численные методы. Доминирование конвекции над диффузией приводит к образованию областей с большими градиентами функции, что создает серьезные трудности для классических разностных схем [1, 2].

Характерной особенностью является нарушение монотонности решения при аппроксимации первой производной центральными разностями, что требует сильного уменьшения шага сетки. Переход к односторонним разностям размывает узкие зоны решения и приводит к потере точности. В современных технологиях для обеспечения монотонности решения применяются принцип регуляризации разностных схем [1]. Практические потребности решения жестких краевых задач ставят задачу разработки и применения новых вычислительных технологий, обеспечивающих точность и экономичность численного анализа [3].

В данной работе получена новая разностная схема для решения стационарного конвективно-диффузионного уравнения переноса. В основе ее построения лежит переход к самосопряженной форме уравнения [4] и применение метода контрольного объема [2].

**Постановка задачи.** Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  конвективно-диффузионное уравнение переноса с краевыми условиями общего вида

$$\frac{d}{dx} \left( f_1(x) \frac{du}{dx} \right) + f_2(x) \frac{du}{dx} + f_3(x)u = f_4(x), \quad (1)$$

$$x = a: \quad q_1 \frac{du}{dx} + q_2 u = q_3, \quad x = b: \quad p_1 \frac{du}{dx} + p_2 u = p_3 \quad (2)$$

Здесь  $u(x)$  – искомая функция;  $f_1(x)$ – $f_4(x)$  – коэффициенты уравнения, причем  $f_1(x) > 0$  и  $f_3(x) \leq 0$ ;  $q_i, p_i$  ( $i=1-3$ ) – заданные числа,  $q_1, p_1 > 0$ ,  $q_2 < 0$ ,  $p_2 > 0$ ,  $q_1^2 + q_2^2 > 0$  и  $p_1^2 + p_2^2 > 0$ .

**Результаты.** Введем на  $[a, b]$  неравномерную сетку

$$\Omega = \{ a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N = b \}, \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Исключим в (1) конвективный член, приведя уравнение к самосопряженному (дивергентному) виду [4]

$$\frac{d}{dx} \left( \varphi f_1(x) \frac{du}{dx} \right) + \varphi f_3(x)u = \varphi f_4(x), \quad \varphi = \exp \left( \int_{x_i}^x (f_2 / f_1) dx \right). \quad (3)$$

Проинтегрируем (3) от  $x_{i-1/2}$  до  $x_{i+1/2}$ , получим

$$J_{i+1/2} - J_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x) f_3(x) u dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi(x) f_4(x) dx, \quad J = \varphi(x) f(x) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай  $f_3(x) = f_{3,i}$ , а  $f_4(x)$  – линейная функция. Беря соответствующие интегралы, получим выражения коэффициентов разностной схемы во внутренних узлах на трехточечном шаблоне

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -d_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (5)$$

$$a_i = \varphi_{i-1/2} \frac{f_{1,i-1/2}}{h_i}, \quad b_i = \varphi_{i+1/2} \frac{f_{1,i+1/2}}{h_{i+1}}, \quad c_i = a_i + b_i - f_{3,i} \psi_i,$$

$$d_i = - \left\{ f_{4,i-1} \frac{h_i [1 - e^{-z^-} (z^- + 1)]}{4 (z^-)^2} + f_{4,i+1} \frac{h_{i+1} [1 + e^{z^+} (z^+ - 1)]}{4 (z^+)^2} + f_{4,i} \left[ \psi_i + \frac{h_i [e^{-z^-} (z^- + 1) - 1]}{4 (z^-)^2} + \frac{h_{i+1} [e^{z^+} (1 - z^+) - 1]}{4 (z^+)^2} \right] \right\}, \quad z^+ = \frac{f_{2,i+1/2} h_{i+1}}{f_{1,i+1/2} 2},$$

$$z^- = \frac{f_{2,i-1/2} h_i}{f_{1,i-1/2} 2}, \quad \psi_i = \frac{h_i [1 - e^{-z^-}]}{2 z^-} + \frac{h_{i+1} [e^{z^+} - 1]}{2 z^+}, \quad \varphi_{i+1/2} = e^{z^+}, \quad \varphi_{i-1/2} = e^{-z^-}$$

Выражения для граничных узлов получаются интегрированием (3) по приграничному объему с учетом (2). Полученная схема является консервативной, монотонной с погрешностью аппроксимации  $O(h^2)$ .

**Заключение.** Предложена новая разностная схема для решения жестких краевых задач конвективно-диффузионного переноса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломассообмена и динамики жидкости – М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Зверев В.Г. Численные методы решения задач с пограничным слоем. – Новосибирск: Наука, 2017. – 212 с.
4. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. – М.: Наука, 1989. – 344 с.

УДК 519.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ПРИМЕСИ ОТ ВЫСОТНЫХ ИСТОЧНИКОВ НАД ГОРОДОМ  
ПРИ НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ  
УСЛОВИЯХ**

Е.А. Каратаева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, механико-математический факультет  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: nebosolnze@gmail.com

***Аннотация.** С помощью лагранжевой дисперсионной стохастической модели выполнено моделирование распространения примеси от высотных точечных источников. Получены данные позволяют проводить качественный анализ модели путем сравнения с другими моделями и общедоступными данными.*

***Ключевые слова.** Лагранжева дисперсионная модель, загрязнение воздуха, частицы.*

**NUMERICAL SIMULATION OF POLLUTANTS EMISSION FROM  
HIGH-ALTITUDE POINT SOURCES TRANSPORT OVER THE  
CITY UNDER ADVERSE METEOROLOGICAL CONDITIONS**

E.A. Karataeva

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: nebosolnze@gmail.com

***Annotation.** A Lagrangian dispersion stochastic model is used to simulate pollutants emission from point sources above the ground. The obtained data allows to analyze the model by comparing it with other models and available data.*

***Key words.** Lagrangian dispersion model, air pollution, particles.*

**Введение.** Целью работы является разработка лагранжевой дисперсионно-стохастической модели для моделирования распространения инертной примеси от высотного точечного источника в атмосферном

пограничном слое атмосферы, тестирование на известном аналитическом решении, применение для исследования влияния инверсии опускания на загрязнение приземного воздуха от высотных источников.

**Постановка задачи.** По заданным параметрам положения в пространстве и интенсивности источника (трубы некоторой высоты) требуется найти концентрацию распространившейся из него примеси. Труба располагается внутри некоторого объема пространства  $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ . В начальный момент времени концентрация примеси нулевая. Начальное положение каждой частицы совпадает с положением источника. Вычисляется траектория движения:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(x(t), y(t), z(t), t)\Delta t,$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(x(t), y(t), z(t), t)\Delta t,$$

$z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(x(t), y(t), z(t), t)\Delta t$ , где  $(v_x, v_y, v_z)$  – вектор ветра. Частицы отражаются от верхней и нижней границ. Каждая частица несет в себе определенное количество вещества. Актуальная скорость ветра состоит из компонент, рассчитанных по модели численного прогноза погоды, и турбулентных пульсаций, для которых используются соотношения  $v'_x = \sqrt{2k/3}\xi_x$ ,  $v'_y = \sqrt{2k/3}\xi_y$ , где  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  – случайные числа. Все случайные числа в работе принадлежат гауссову распределению со средним 0 и дисперсией 1.

$v'_z$  зависит от условий стратификации атмосферы и  $dv'_z = (a_0 + a_1v'_z + a_2v'^2_z)dt + b_0\xi$ , где  $\xi$  – случайное число,  $b_0 = \sqrt{2\mathcal{E}dt}$ , где  $\mathcal{E}$  – диссипация, а формулы для коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$  можно найти в литературе [1]. В качестве численного метода использовался явный метод Эйлера.

**Результаты.** Проведено тестирование на известном аналитическом решении, установлено, что результаты, полученные по модели, более близки к точному решению, нежели результаты, полученные по методу Эйлера [2].

Модель применена для конвективного пограничного слоя: произведены расчеты концентрации примеси при запуске 20 000 частиц в области 15000x200x1000 метров для различных высот источников. Контурный график безразмерной концентрации для средней высоты источника  $z/z_1 = 0.24$ , где  $z$  – высота нахождения частицы, а  $z_1$  – высота слоя перемешивания, представлен на рис. 1.

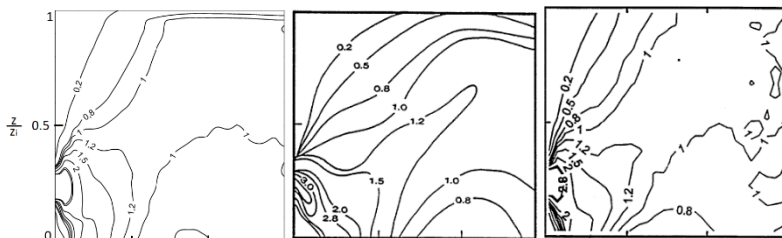


Рис. 1. Контурные безразмерной концентрации для высоты  $z/z_i = 0.24$  полученные по модели автора (слева), измеренные Уиллисом и Дирддорфом (в центре) и полученные Franzese [3] (справа).

Результаты лучше согласуются с моделью [3], хотя вполне сопоставимы для двух моделей и эксперимента для всех трех высот. Это позволяет сделать вывод о достаточной точности авторской численной модели.

Рассматриваемая лагранжева дисперсионная стохастическая модель была применена для исследования распространения газообразной примеси от высотных точечных источников (двух рядом стоящих труб теплоэлектростанции), расположенных в пределах города Томска. Исследовался вопрос о влиянии инверсии оседания на загрязнение воздуха в приземном слое атмосферы в черте города.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hurley P.J. The air pollution model (TAPM) version 2. Part 1, Technical description // CSIRO Atmospheric Research Technical Paper. – 2002. – № 55.
2. Каратаева Е.А., Шельмина Е.А., Старченко А.В. Применение подходов Эйлера и Лагранжа для численного решения прямой задачи переноса примеси // Аэрозоли Сибири. XXIX Конференция: Тезисы докладов. – Томск, 2022. – С. 43-44.
3. Franzese P., Luhar A. K., Borgas M. S. An efficient Lagrangian stochastic model of vertical dispersion in the convective boundary layer // Atmospheric Environment. – 1999. – Vol. 33(15). – P. 2337-2345.

УДК 519.6:532.4

## **ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ МИКРОМАСШТАБНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В УЛИЧНЫХ КАНЬОНАХ**

Д.В. Лещинский, Е.А. Данилкин, А.В. Старченко

Томский государственный университет, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: 360flip182@gmail.com

***Аннотация.** В работе рассматривается построение параллельного алгоритма численного решения уравнений микромасштабной модели турбулентного течения с использованием технологий параллельного программирования Message Passing Interface (MPI) и Open Multi-Processing (OpenMP). Для модели реализована автоматическое распараллеливание циклов при использовании технологии OpenMP и 2D декомпозиция сеточной области с использованием технологии MPI.*

***Ключевые слова.** Численные методы, параллельное программирование, MPI, OpenMP.*

## **A PARALLEL ALGORITHM FOR A MICROSCALE MODEL OF TURBULENT FLOW IN STREET CANYONS**

D.V. Leshchinskiy, E.A. Danilkin, A.V. Starchenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: 360flip182@gmail.com

***Abstract.** The paper discusses the developed parallel algorithm for the numerical solution of a microscale model of turbulent flow using such parallel programming technologies as Message Passing Interface (MPI) and Open Multi-Processing (OpenMP). For the model, automatic loop parallelization is implemented using OpenMP technology and 2D decomposition of the mesh area using MPI technology.*

***Keywords.** Numerical method, parallel computing, transport equation, OpenMP, MPI.*

**Введение.** Моделирование состава атмосферы и ее динамики в городском подслое, представляет собой сложнейшую задачу математического моделирования. Развиваемую авторским коллективом математическую модель планируется использовать для проведения масштабных параметрических расчетов, поэтому требуется разработка параллельных вычислительных алгоритмов, адаптированных на использование современной вычислительной техники. Разнообразию в архитектуре и компоновке высокопроизводительных вычислительных систем порождает разнообразие инструментов для построения параллельных программ. На сегодняшний день в области научных вычислений самыми популярными и узнаваемыми для написания параллельных программ являются технологии MPI и OpenMP.

В работе рассматривается построение алгоритмов решения разработанной модели с использованием технологий MPI и OpenMP на вычислительной системе с общей памятью.

**Математическая модель.** Математическая модель включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, уравнения Навье–Стокса, переноса примеси и теплообмена. Замыкание описанной системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска. Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая  $k$ - $\varepsilon$  – модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавучести.

Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательно решения систем сеточных уравнений на основе метода Зейделя [1].

**Построение параллельного алгоритма.** При применении технологии MPI в качестве основного подхода распараллеливания выбрана двумерная декомпозиция сеточной области на подобласти. Каждому процессорному элементу, задействованному в вычислениях, распределяются значения сеточной функции, принадлежащие локальной подобласти, для вычисления значений на следующей итерации. Из-за используемого шаблона неявной разностной схемы для вычисления очередного приближения в приграничных узлах каждой локальной



подобласти необходимо знать значения сеточной функции с соседней граничащей подобласти. Для этого создаются фиктивные ячейки для хранения данных с процессорного элемента, рассчитывающего в соседней подобласти декомпозиции, и организуются пересылки этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности вычислений в каждой локальной подобласти [1]. При разработке параллельной программы используется ряд функций MPI для создания двумерной декартовой логической топологии и создания пользовательских типов данных для обеспечения эффективной пересылки данных между процессами.

При создании параллельного многопоточного приложения с использованием технологии OpenMP нужно распараллелить вычислительные блоки, в котором производится перевычисление значений сеточной функции для компонент скорости, поправки давления и характеристик турбулентности на каждой итерации. Для исполнения последовательного алгоритма, построенного на основе метода Зейделя, в многопоточном режиме достаточно перед вычислительными циклами каждого вычислительного блока добавить директиву «omp parallel», указывающую на параллельное исполнение следующего за ней блока, как правило, содержащего вложенные циклы. Расчеты выполнялись на вычислительной системе с общей памятью, объединяющей два 6-ти ядерных процессора Intel с гипертрейдингом. На сетке 162x162x47 узлов получено ускорение OpenMP-программы более чем в 12 раз на 24 нитях, и в 9,5 раз на 12 нитях. Аналогичные результаты получены для MPI-программы.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).*

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. – Томск.: Изд-во Том. ун-та, 2015. – 252с.

## STOCHASTIC LONGITUDINAL OSCILLATIONS VISCOELASTIC ROPE WITH MOVING BOUNDARIES, TAKING INTO ACCOUNT DAMPING FORCES

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova

Moscow State University, Russia, Moscow, Leninskie gory, 1, 119991

E-mail: vladlitvinov@rambler.ru

***Abstract.** Currently, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of dynamic phenomena occurring in the designed facilities. The widespread use of mechanical objects with movable boundaries in technology necessitates the development of methods for their calculation. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to move on to probability-statistical, where random variables, stochastic fluctuations are present. The work considers stochastic linear longitudinal oscillations of viscoelastic rope with movable boundaries, taking into account the influence of damping forces.*

**Introduction.** The problem of oscillations of systems with movable boundaries is associated with obtaining solutions of integro-differential equations and partial differential equations in time-variable regions [1-3]. Such tasks are currently not well understood. Their feature is the complexity of using known methods of mathematical physics suitable for fixed-boundary problems. The complexity of the obtained solutions is explained by the fact that there is still no sufficiently general approach to analyzing the characteristics of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced vibrations is of great importance here. Attempts to investigate this process have been made, but the results obtained are limited mainly to a qualitative description of dynamic phenomena. The solution is mainly using approximate methods [2], since it is possible to obtain accurate solutions only in the simplest cases [1].

If damping of transverse oscillations occurs mainly due to action of external damping forces, then in case of longitudinal oscillations damping is mainly affected by elastic imperfections of material of vibrating object [3]. The study of viscoelasticity includes the analysis of stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The work considers stochastic linear longitudinal oscillations of viscoelastic rope with movable boundaries taking into account the influence of damping forces. The case of

the difference nucleus allows us to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integrodifferential equations to investigating a system of stochastic differential equations. It is proposed to use the statistical numerical Monte Carlo method to estimate the decomposition coefficients [4].

**Research methods.** The differential equation describing the longitudinal vibrations of the rope (viscoelasticity is taken into account based on the Voigt hypothesis) has the form [3]

$$U_{tt}(x, t) + 2\alpha U_t(x, t) - a^2 \left[ U_{xx}(x, t) - \int_0^t K(t-\nu) U_{xx}(x, \nu) d\nu + \mu U_{xx}(x, t) \right] = f(x, t) \quad (1)$$

Border conditions

$$U(v_0 t, t) = 0; \quad U(v_0 t + l_0, t) = 0. \quad (2)$$

Initial conditions

$$U(x, 0) = U_1(x); \quad U_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

In problem (1) - (3) it is indicated:  $U(x, t)$  – longitudinal displacement of the rope point with coordinate  $x$  at time  $t$ ;  $a^2 = E / \rho$  – velocity of wave propagation in the rope,  $E$  – modulus of elasticity of the rope material,  $\rho$  – linear mass density;  $\alpha$  – resistance force of the medium acting per unit length of the rope, proportional to the speed of movement;  $\mu$  – a small parameter that takes into account viscoelasticity;  $v_0 t + l_0$  – the law of motion of the rope boundary;  $f(x, t)$  – a function that characterizes an external disturbance;  $K(z)$  – relaxation core.

Characteristics of random variables - mathematical expectation, variance and covariance. To find the characteristics of stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope, it is necessary to obtain statistical estimates for the solution of a system of random integro-differential equations (1). To do this, the relaxation kernel  $K(z)$  can be taken in exponential form with a random component:

$$K(z, \bar{\beta}) = K(z, \bar{b}) \Big|_{\bar{b}=\bar{\beta}} = \sum_{j=1}^N c_j e^{-\beta_j z}.$$

**Results.** Denote the dependence of  $\tilde{V}(\xi, \tau)$  and  $\tilde{V}_n(\tau)$  on the random vector  $\bar{b}$  as  $\tilde{V}(\xi, \tau, \bar{b})$  and  $\tilde{V}_n(\tau, \bar{b})$ , respectively. By changing the variable

$$u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \int_{\xi}^1 e^{-\beta_j d \eta} \tilde{V}_n \left( \frac{1}{\nu} (\xi - \eta) + \tau \right), \bar{b} d\eta$$

the system of random integro-differential equations (1) is transformed into a system of random differential equations of the form

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n_{rr}}(\tau, \bar{b}) + \left( 2k_1 + \frac{\lambda}{\nu} \omega_n^2 \right) \tilde{V}_{n_r}(\tau, \bar{b}) + \\ + \omega_n^2 (1 - \nu^2) \tilde{V}_n(\tau, \bar{b}) + \omega_n^2 d \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j d \tau} u_{nj}(\tau, \bar{b}) = \tilde{F}_n(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

The initial conditions will look like

$$\tilde{V}_n(0, \bar{b}) = 2 \int_0^1 \tilde{V}_1(\xi) \sin(\omega_n \xi) d\xi; \quad \tilde{V}_{n_r}(0, \bar{b}) = 0; \quad u_{nj}(0, \bar{b}) = 0. \quad (5)$$

**Conclusion.** The problem of analyzing a system of stochastic integrodifferential equations is reduced to studying a system of stochastic differential equations. The study of the system (4) - (5) is possible using the statistical numerical Monte Carlo method [4].

## REFERENCES

1. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.
2. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.
3. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188-199.
4. Fishman G. S. Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications. — SpringerVerlag, 1995 (Corrected 3 rd printing, 1999). — 718 pp.

## **ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ПРИРОДНЫХ ПОЖАРАХ**

А.В. Луценко<sup>1,2</sup>, Е.Л. Лобода<sup>1,2</sup>, М.В. Агафонцев<sup>1,2</sup>, Д.П. Касымов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup> Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН,  
Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: lu.anastasik@gmail.com, loboda@mail.tsu.ru,  
kim75mva@gmail.com, denkasymov@gmail.com

***Аннотация.** В докладе представлены результаты экспериментальных исследований спектров пульсации температуры и соответствующие им масштабы турбулентности в пламени при модельном верховом пожаре и в воздухе в окрестности фронта горения. Установлено, что в пламени верхового пожара внутренние масштабы турбулентности соответствуют инерционному интервалу энергетического спектра, а турбулентные процессы в пламени формируют индуцированную атмосферную турбулентность.*

***Ключевые слова.** Турбулентность, пламя, атмосферная турбулентность, горение, диссипативные процессы.*

Массовые природные пожары оказывают влияние и на глобальные климатические процессы. При природных пожарах выделяется значительное количество тепловой энергии, а интенсивные турбулентные процессы в пламени природного пожара формируют турбулентность в конвективной колонке над очагом горения [1]. Это оказывает влияние на метеорологические параметры: скорость ветра, температуру и влажность воздуха, индуцированную атмосферную турбулентность. Турбулентные процессы в атмосфере характеризуются внутренним и внешним масштабами, соответствующие размерам крупных вихрей и мелких вихревых структур соответственно.

В данной работе приводится исследование связи масштабов турбулентности в пламени с масштабами индуцированной атмосферной турбулентности и диссипативными процессами; приводятся результаты анализа и обработки экспериментальных данных о турбулентных процессах в пламени модельного верхового лесного пожара и в атмосфере в окрестности очага горения. Экспериментальные данные получены с помощью бесконтактных методов измерений метеопараметров

и ИК термографии с применением оригинальных методик, разработанных в ТГУ.

Получены спектры изменения температуры воздуха и масштабы индуцированной атмосферной турбулентности в окрестности фронта модельного пожара. Установлены диапазоны частот пульсации температуры воздуха, соответствующие инерционному и диссипативному участкам энергетического спектра для степного пожара. Показано, что для степного пожара диссипативные процессы начинают формироваться на высоте 10 м при значении  $\lg k > 1,58$  и соответствующей частоты пульсаций  $f > 3$  Гц. На высоте 3 м диссипативные процессы при модельном степном пожаре не наблюдаются. Показано, что при модельном верховом пожаре на высоте 10 м турбулентные процессы в атмосфере соответствуют инерционному участку энергетического спектра, а диссипативные процессы практически не проявляются.

На основании проделанной работы были сделаны следующие выводы: с увеличением высоты внутренние масштабы турбулентности в пламени незначительно увеличиваются вследствие расширения в результате выделения тепла при химических реакциях; они соответствуют инерционному интервалу энергетического спектра [2-3], а диссипативные процессы в пламени в полунатурных условиях проведения эксперимента не существенны. Турбулентные процессы в пламени формируют индуцированную атмосферную турбулентность с появлением характерных частот 0-2 Гц в спектре пульсации температуры воздуха. Пульсациям температуры воздуха с частотами около 0,1 Гц соответствует внешний масштаб турбулентности, соответствующий высоте измерений.

Необходимо отдельно отметить, что в условиях экспериментов исходя из объективных физических ограничений и необходимости обеспечить сохранность оборудования все измерения метеопараметров осуществлялись не непосредственно над фронтом модельного пожара, а на небольшом удалении по направлению ветра. Также высота измерений ограничивалась размерами имеющейся в распоряжении коллектива мачты. Это безусловно оказывает влияние на результаты измерений, особенно на высоте 3 м. В будущем представляет интерес применение оптических способов измерения температуры и характеристик атмосферы непосредственно над фронтом пожара и на высотах больше 10 м.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Loboda E., Kasymov D., Agafontsev M., Reyno V., Gordeev Y., Tarakanova V., Martynov P., Loboda Y., Orlov, K., Savin K. et al. Effect of Small-Scale Wildfires on the Air Parameters near the Burning Centers // *Atmosphere*. – 2021. – Vol. 12. – No. 1. – P. 75 (1-15). DOI: 10.3390/atmos12010075
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений // М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – С. 368.
3. Лукин В.П. Внешний масштаб турбулентности и его влияние на флуктуации оптических волн // *УФН*. – 2021. – Т. 191. – No. 3. – С. 292-317.

УДК 519.17, 551.577.61

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ВЕРОЯТНОГО ЗАТОПЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ**

И.Ю. Олтян<sup>1</sup>, Е.В. Арефьева<sup>1</sup>, М.В. Болгов<sup>2</sup>, Н.Н. Олтян<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ),  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, д.7, 121352

<sup>2</sup> Институт водных проблем РАН,  
Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 3, 119333

<sup>3</sup> Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,  
Россия, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49/2, 125167

E-mail: irenaoltyan@mail.ru

***Аннотация.** Представлены результаты моделирования гидрографической сети Иркутской области, а также зон вероятного затопления местности при паводковых наводнениях с использованием ориентированных графов.*

***Ключевые слова.** Зоны вероятного затопления, ориентированный граф, гидрографическая сеть, паводковое наводнение, цифровая модель местности, гидропост.*

## **MODELING OF PROBABLE FLOODING AREAS USING ORGRAPH**

I. Oltyan<sup>1</sup>, E. Arefyeva<sup>1</sup>, M. Bolgov<sup>2</sup>, N. Oltyan<sup>3</sup>

***Abstract.** The results of modeling the hydrographic network of the Irkutsk region, as well as zones of probable flooding of the territory during floods using oriented graphs are presented.*

***Keywords.** Probable flooding areas, orgraph, hydrographic network, flood, digital relief model, gauging station.*

**Введение.** Применяемые в настоящее время вероятностно-детерминированные подходы к моделированию зон вероятного затопления требуют большого количества исходных данных, инструментальных измерений, исследований местности. Перспективным представляется моделирование зон вероятного затопления с использовани-



ем цифровой модели рельефа (ЦМР) и построения гидрографической сети в виде ориентированного графа, характеризующего направление стока воды.

**Постановка задачи.** При моделировании речных систем используются различные методы интерполяции [1], применяются геоинформационные системы (ГИС). Требуется создать математическую модель гидрографической сети, позволяющую определять гидрометрические характеристики водотоков и моделировать зоны вероятного затопления.

Одним из подходов является представление гидрографической сети в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$  [2, 3, 4], построенного на основе матрицы направлений стока, полученной по цифровой модели рельефа (ЦМР) [4]:

$$G = (V(G), E(G)),$$

где  $V(G)$  – множество вершин графа  $G$  (соответствуют ячейкам матрицы ЦМР, хранят определенные признаки);

$E(G)$  – множество ребер графа  $G$  (соответствуют направлению поверхностного стока в матрице направлений стока [4]).

Использование ориентированного графа гидрографической сети, ЦМР, расчетных зависимостей и эмпирических коэффициентов, представленных в действующих сводах правил [5] позволяет моделировать зоны вероятного затопления в выбранных вершинах графа, называемых далее «виртуальные гидропосты».

**Результаты.** На рисунке 1 представлена модель гидрографической сети в виде ориентированного графа, построенная по данным радарной топографической съемки Shuttle radar topographic mission (SRTM). В работе [6] показаны примеры моделирования зоны вероятного затопления.

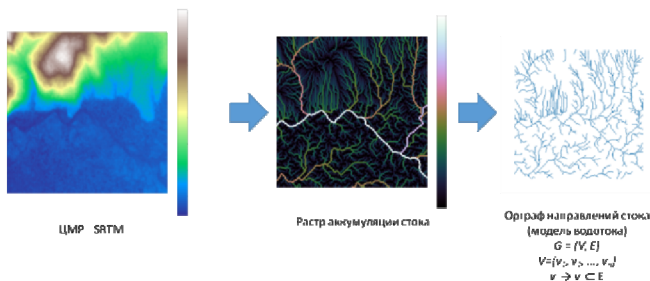


Рис. 1. Построение модели гидрографической сети с использованием ЦМР и ориентированного графа

**Заключение.** Выполнено численное моделирование и картографирование зон вероятного затопления в выбранных вершинах графа. Перспективным является создание модели, предназначенной для гидрологического прогнозирования, основанной на применении ориентированных графов и глубоких нейронных сетей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ратнер, Е. А. Анализ точности методов интерполяции при нанесении рельефа дна на навигационные карты внутренних водных путей / Е. А. Ратнер // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2021. – Т. 13, № 5. – С. 685-693. – DOI 10.21821/2309-5180-2021-13-5-685-693. – EDN MABXVQ.
2. HydroNets: Leveraging River Structure for Hydrologic Modeling (электронный ресурс) URL: <https://ai4earthscience.github.io/iclr-2020-workshop/papers/ai4earth04.pdf> (дата обращения 13.11.2022).
3. О методе прогнозирования параметров катастрофических наводнений на неизученных территориях в целях оценки риска чрезвычайных ситуаций / А. Н. Щеглов, К. Ю. Жалнин, И. Ю. Олтян [и др.] // Технологии гражданской безопасности. – 2022. – Т. 19, № 3(73). – С. 78-83. – EDN MXDHWZ.
4. Результаты расчетов гидрологических параметров для оценки риска чрезвычайных ситуаций на неизученных территориях на основе моделирования катастрофических наводнений / А. Н. Щеглов, К. Ю. Жалнин, Г. П. Радионов [и др.] // Технологии гражданской безопасности. – 2022. – Т. 19, № 4(74). – С. 11-19. – EDN MLTITI.
5. СП 33-101-2003. Определение основных гидрологических характеристик.
6. О результатах применения метода прогнозирования параметров катастрофических наводнений на неизученных территориях в целях оценки риска чрезвычайных ситуаций / А. Н. Щеглов, И. Ю. Олтян, Е. В. Арефьева [и др.] // Технологии гражданской безопасности. – 2023. – Т. 20, № 1(75). – С. 48-56. – EDN CZWUUT.

УДК: 622.276.26, 532.54

## **АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ ПРОДУКТИВНОСТИ МНОГОЗАОБОННЫХ СКВАЖИН**

А.С. Русских

Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: anastasiya\_russkih@bk.ru

***Аннотация.** Представлена разработанная методика аналитического расчета и экспресс-оценки притока жидкости к многоствольной скважине. Приведены результаты верификации данной методики и результаты расчета с ее помощью предельной длины стволов скважины, а также угла между ними, обеспечивающих максимальную продуктивность и экономическую эффективность добычи нефти.*

***Ключевые слова.** Фильтрация жидкости, многоствольная скважина, приток жидкости, контур питания, аналитическая модель.*

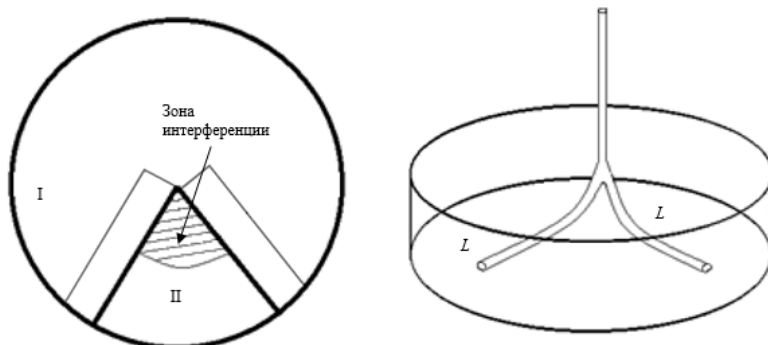
**Введение.** Разработка залежей с использованием многоствольных осложнена выбором оптимальной схемы их размещения и системы разработки для конкретного месторождения.

Для решения данной проблемы целесообразно разработать методику аналитического расчёта, позволяющую проводить экспресс-оценку притока жидкости к двуствольной скважине, не прибегая к многовариантным и затратным по времени расчетам с использованием гидродинамических моделей.

**Постановка задачи.** При выборе конфигурации многоствольной скважины основными факторами являются длина стволов и угол между этими стволами. Расчет максимальных дебита и продуктивности двуствольной скважины затрудняет интерференция, связанная с взаимным расположением стволов скважины. Выбор оптимального варианта расположения стволов скважины путём многовариантных расчетов с использованием гидродинамической модели занимает значительное количество времени.

В известных аналитических методиках [1, 2, 3] не рассмотрено влияние угла между стволами, а также длины стволов на интерферен-

цию (взаимовлияние), и, следовательно, на продуктивность многоствольной скважины (рис. 1).



*Рис. 1. Геометрическое представление двуствольной скважины*

**Результаты.** В результате проведенных расчетов определена эффективная длина стволов скважины, которая составила 750 м. При дальнейшем увеличении длины ствола до 1000 м прирост дебита жидкости составляет менее 3%, а затраты на его бурение увеличиваются на 17 %. Следовательно, использование стволов длиной более 750 м экономически не эффективно.

**Заключение.** Разработана методика аналитического расчета притока жидкости к двуствольной скважине, учитывающая угол между стволами многоствольной скважины и интерференцию между ними, позволяющая проводить экспресс-оценку притока жидкости к двуствольной скважине, которая отличается от известных методик тем, что позволяет без использования многовариантных расчетов на гидродинамическом симуляторе определить с параметры скважины, которые обеспечат ее максимальную продуктивность и экономическую эффективность.

Рекомендуемый угол между стволами скважины составил  $50^\circ$ . При его увеличении до  $180^\circ$  прирост дебита жидкости незначительный – около 1%.

Таким образом, наибольшей эффективностью обладает двуствольная скважина с длиной стволов 750 м и углом между стволами  $50^\circ$ .

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Борисов Ю. П., Пилатовский В. П., Табаков В. П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. - М., Издательство Недр, 1964. – 156 с.
2. Никитин Б. А., Григулецкий В. Г. Стационарный приток нефти к одиночной горизонтальной скважине в анизотропном пласте // Нефтяное хозяйство. – 1992. – №8. – С. 10-12.
3. Меркулов В. П. О дебите наклонных и горизонтальных скважин // Нефтяное хозяйство. – 1960. – №2. – С. 51-56.

УДК: 622.276.26, 532.54

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАСТА С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

А.С. Русских

Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: anastasiya\_russkih@bk.ru

***Аннотация.** В статье представлены результаты по восстановлению абсолютной проницаемости залежи углеводородов с вторичными фильтрационно-емкостными свойствами с использованием метода вейвлет преобразований. Приведены результаты настройки гидродинамической модели залежи углеводородов на исторические данные работы скважин.*

***Ключевые слова.** Вторичные фильтрационно-емкостные свойства, абсолютная проницаемость, вейвлет-преобразование, гидродинамическое моделирование.*

**Введение.** Восстановить проницаемость пласта для гидродинамической модели для коллекторов с ВФЕС стандартными способами не представляется возможным. В связи с этим, решено было использовать альтернативный метод восстановления кубов проницаемости. С учетом специфики поставленной задачи нами выбран метод вейвлет-преобразований, который является информативным, эффективным инструментом анализа структурных поверхностей пластов [1]. В отличие от метода Мурья [2] он учитывает структурную составляющую залежей и не зависит от инклинометрических поскважинных замеров, которые могут иметь значительную погрешность. Данный метод хорошо зарекомендовал себя при решении задач, связанных с выделением локальных составляющих структурной поверхности пласта, таких как анализ локализации остаточных запасов нефти, обладающих высокой плотностью.

**Постановка задачи.** Целью данной работы являлось восстановление куба абсолютной проницаемости залежи углеводородов с ВФЕС методом вейвлет-преобразований для дальнейшего использования в гидродинамической модели объекта, верификация полученной модели путем воспроизведения динамики работы скважин, настройки на заме-

ры забойных давлений, а также обоснование возможности ее применения для кратко и среднесрочного прогнозирования распространения продуктивных зон по площади позволяющего более эффективно разрабатывать объект.

**Результаты.** Основной задачей адаптации гидродинамической модели для коллекторов с ВФЕС являлся подбор коэффициентов линейной зависимости проницаемости от локальной составляющей структурной поверхности и настройка их на исторические данные работы скважин. С помощью вейвлет-преобразований нами были получены карты вейвлет-разложений разной детальности. В ходе гидродинамических расчетов выяснилось, что лучшие результаты настройки модели получаются с использованием карты вейвлетов третьего уровня и линейной зависимости от данной карты, по которой отстраивается куб абсолютной проницаемости. Коэффициенты, влияющие на точность этой функции, были подобраны эмпирически (путем сравнения полученных результатов расчета с историческими данными).

**Заключение.** Использование метода вейвлет-преобразований для восстановления куба абсолютной проницаемости сектора гидродинамической модели Бажено-Абалакских отложений одного из месторождений Краснотенинского свода показало возможность корректной настройки гидродинамической модели, а также возможность расчета прогнозных показателей для коллекторов с ВФЕС.

Полученные карты амплитудных отклонений позволяют сделать обоснованный прогноз продуктивных зон по площади Бажено-Абалакских отложений, что позволит эффективнее разместить проектный фонд скважин по площади объекта.

Показано, что использование метода вейвлет-преобразований для восстановления куба абсолютной проницаемости для гидродинамического моделирования имеет перспективы применения на месторождениях, сложенных коллекторами с ВФЕС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов В. С. Моделирование разработки нефтяных и газовых месторождений : учебное пособие для студентов образовательных организаций высшего образования, обучающихся по направлению подготовки магистратуры "Нефтегазовое дело"// Тюменский государственный нефтегазовый университет. - Тюмень : ТюмГНГУ, 2014. – 142 с.

2. Douglas J. Jr., Peaceman D. W., Rachford H. H. Jr. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement // Trans. SPE AIME 1959. 216. 297 – 306.
3. Zgangxin Chen, Gyamrem Huan, Yuanle Ma. Computational methods for multiphase flows in porous media// Dallas, Texas: Southern Methodist University. – 2006.
4. М.А. Антипин, Ю.А. Плиткина, А.П. Девятков, А.В. Вершинина. Развитие аппарата структурного анализа в рамках методики локализации остаточных запасов нефти на примере Покровского месторождения Самарской области //В сб. «Оптимизация технологий разработки нефтяных месторождений». – 2008. – № 2. – С. 5-11.



УДК 519.63

## **ПРИМЕНЕНИЕ ТАЙЛИНГА ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ**

В.М. Свешников, И.А. Климонов

Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
Россия, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6, 630090

E-mail: victor@lapasrv.sccc.ru

***Аннотация.** Проведены экспериментальные исследования ускорения решения краевых задач методом декомпозиции. Для этого при решении краевых подзадач в подобластях, возникающих в результате декомпозиции расчетной области, применяется специальная организация вычислений, называемая тайлингом, позволяющая эффективно использовать сверхбыструю память компьютера. Даны результаты численных экспериментов по эффективности применения тайлинга и по определению его оптимальных параметров.*

***Ключевые слова:** краевые задачи, метод декомпозиции, итерационные методы, тайлинг.*

## **APPLICATION OF TILING IN SOLVING BOUNDARY PROBLEMS BY THE DOMAIN DECOMPOSITION METHOD**

V.M. Sveshnikov, I.A. Klimonov

***Abstract.** Experimental studies of the acceleration of solving boundary value problems by the domain decomposition method have been carried out. To do this, when solving boundary subproblems in subdomains arising as a result of decomposition of the computational domain, a special organization of calculations, called tiling, is used, which makes it possible to efficiently use ultrafast memory. The results of numerical experiments on the efficiency of tiling and on the determination of its optimal parameters are given.*

***Keywords:** boundary value problems, decomposition method, iterative methods, tiling.*

**Введение.** Решение краевых задач методом декомпозиции [1] приводит к сведению сложной расчетной области к последовательности

более простых подобластей и решению в них более простых подзадач. Рассмотрим вариант, в котором разбиение на подобласти проводится равномерной прямоугольной макросеткой, как это делается при построении квазиструктурированных сеток [2]. В каждой подобласти строится своя структурированная прямоугольная подсетка. Особое внимание требуется уделить решению краевых подзадач на подсетках, так как это составляет основной вклад в решение краевых задач в целом.

Настоящая работа посвящена вопросам применения для этих целей тайлинга – средства ускорения решения за счет эффективного использования сверхбыстрой памяти компьютера, которой снабжен процессор. В выполнении арифметической операции основное время тратится на доставку операндов, если она происходит из медленной оперативной памяти. Процессор имеет свою память – регистры, которая работает значительно быстрее оперативной памяти, но имеет сравнительно небольшой объем. Поэтому можно добиться ускорения, изменив схему вычислений в численном алгоритме так, чтобы промежуточные данные как можно дольше находились в регистрах. Это достигается в результате применения тайлинга, то есть изменения хода вычислений без изменения сути самого алгоритма. Исследования на данную тему проводились Б. Я. Штейнбергом с соавторами [3], в частности применительно к работе итерационного метода Зейделя [4].

В настоящей работе экспериментально исследуется применения тайлинга к двум итерационным методам: последовательной верхней релаксации SOR и симметричной верхней релаксации SSOR при решении краевых подзадач в подобластях. Метод декомпозиции основывается на решении подзадач с сравнительно малым числом узлов подсеток, например, сотни. Результирующая сетка при этом может иметь большое число узлов, например, миллионы. Другой особенностью данного метода является большое число повторов решения в одной и той же подобласти с различными краевыми условиями. Какой метод выбрать для решения в подобластях можно определить только экспериментально, так как теоретические оценки являются асимптотическими которые, во–первых, не годятся для приведенных особенностей расчетов и, во–вторых, не принимают во внимание сложность реализации метода. Экспериментальные исследования на данную тему проводились в работе [5]. Они показали быструю сходимость метода SOR (SSOR – симметричная версия метода SOR). Кроме того, данные методы просты в реализации и допускают применение тайлинга, поэтому они были выбраны для исследования в настоящей статье. В проводимых исследованиях варьируется не только размер подсетки, но и вид

тайла – сеточного блока в тайлинге. Приводятся результаты численных экспериментов, свидетельствующие об ускорении вычислений по сравнению с традиционным подходом до 3 раз. Указывается оптимальный размер тайла.

**Постановка задачи и методы ее решения.** В замкнутой области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  требуется решить краевую задачу

$$L\varphi = f \text{ в области } G, \quad (1)$$

$$l\varphi = g \text{ на границе } \Gamma, \quad (2)$$

где  $L$  – эллиптический оператор,  $l$  – оператор граничных условий,  $\varphi$  – искомая,  $f, g$  – заданные функции координат  $x, y$ . Рассматриваются граничные условия Дирихле и Неймана. Предполагается, что исходные данные обеспечивают единственное достаточно гладкое решение поставленной задачи.

Решение задачи (1), (2) проводится на квазиструктурированных сетках, с применением метода декомпозиции области, основанного на прямой (непосредственной) аппроксимации уравнения Пуанкаре – Стеклова [6], суть которого заключается в следующем. Расчетная область  $\bar{G}$  структурированной прямоугольной макросеткой разбивается на подобласти, среди которых различаются внутренние, полностью лежащие в  $G$ , внешние, не содержащие точек  $\bar{G}$ , граничные, содержащие точки  $G$  и  $\Gamma$ . Во внутренних и граничных подобластях строятся свои подсетки, на которых методом конечных разностей, конечных объемов или конечных элементов решаются краевые задачи. Внешние подобласти исключаются из расчетов. Для сшивки решений в подобластях применяется метод декомпозиции, основанный на прямой (непосредственной) аппроксимации уравнения Пуанкаре – Стеклова на границе сопряжения подобластей (интерфейсе)  $\gamma$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)_{\gamma}^{+} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)_{\gamma}^{-} = 0, \quad (3)$$

Здесь  $\vec{n}$  – нормаль к  $\gamma$ , а знаки  $+$ ,  $-$  означают принадлежность объекта смежным подобластям. Уравнение (3) аппроксимируется на сетке, которая вводится на  $\gamma$ , системой линейных алгебраических уравнений

$$Su + q = 0, \quad (4)$$

где  $u$  – приближенное значение функции  $\varphi$ ,  $S$  – квадратная матрица,  $q$  – вектор. Решение системы (4) осуществляется итерационным процессом по подобластям вида

$$u^{k+1} = \Lambda(u^k, Sr^k), k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Здесь функция  $\Lambda$  определяет конкретный алгоритм,  $r$  – вспомогательный вектор. На каждом шаге (5) решаются краевые подзадачи в подобластях. Запишем сеточные уравнения, аппроксимирующие исходную задачу в  $(i, j)$ -м узле подсетки ( $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$ , где  $N, M$  заданы), в виде

$$-a_{i,j}^1 u_{i-1,j} - a_{i,j}^2 u_{i,j-1} - a_{i,j}^3 u_{i+1,j} - a_{i,j}^4 u_{i,j+1} + a_{i,j}^0 u_{i,j} = f_{i,j}, \quad (6)$$

где  $a_{i,j}^0, a_{i,j}^1, \dots, a_{i,j}^4, f_{i,j}$  – известные величины. Метод последовательной верхней релаксации SOR реализуется по формулам

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j}^{n+1} &= (f_{i,j} + a_{i,j}^1 u_{i-1,j}^{n+1} + a_{i,j}^2 u_{i,j-1}^{n+1} + a_{i,j}^3 u_{i+1,j}^n + a_{i,j}^4 u_{i,j+1}^n) / a_{i,j}^0, \\ u_{i,j}^{n+1} &= \omega \hat{u}_{i,j}^{n+1} + (1 - \omega) u_{i,j}^n, \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (7)$$

где  $1 \leq \omega < 2$  – заданный итерационный параметр,  $n = 0, 1, \dots$  – номер итерации/, а метод последовательной верхней релаксации SSOR – по формулам

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j}^{n+1/2} &= (f_{i,j} + a_{i,j}^1 u_{i-1,j}^{n+1/2} + a_{i,j}^2 u_{i,j-1}^{n+1/2} + a_{i,j}^3 u_{i+1,j}^n + a_{i,j}^4 u_{i,j+1}^n) / a_{i,j}^0, \\ u_{i,j}^{n+1/2} &= \omega \hat{u}_{i,j}^{n+1/2} + (1 - \omega) u_{i,j}^n, \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j}^{n+1} &= (f_{i,j} + a_{i,j}^1 u_{i-1,j}^{n+1} + a_{i,j}^2 u_{i,j-1}^{n+1} + a_{i,j}^3 u_{i+1,j}^{n+1/2} + a_{i,j}^4 u_{i,j+1}^{n+1/2}) / a_{i,j}^0, \\ u_{i,j}^{n+1} &= \omega \hat{u}_{i,j}^{n+1} + (1 - \omega) u_{i,j}^n, \quad i = N, N - 1, \dots, 1; j = M, M - 1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Тайлинг применительно к данным методам заключается в следующем. Узлы подсетки распределяются по блокам (тайлам) заданной размерности. Вместо перебора узлов во всей подсетке в традиционной последовательности: слева – направо, снизу – вверх (так расположены элементы массива  $u$  в оперативной памяти компьютера) данный перебор проводится внутри тайла, а сами тайлы перебираются традиционным образом. При этом численный алгоритм не изменяется, меняется только последовательность вычислений, позволяющая дольше удерживать в сверхбыстрой памяти промежуточные данные.

**Численные эксперименты.** Рассматривалась модельная краевая задача для уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в области } G, \quad (10)$$

$$\varphi = 1 \text{ на границе } \Gamma. \quad (11)$$

Расчетная область  $\bar{G}$  представляла собой единичный квадрат  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  и являлось одной подобластью в методе декомпозиции. Задача (10), (11) аппроксимировалась на квадратной сетке,

При этом выполнялись равенства  $a_{i,j}^1 = a_{i,j}^2 = a_{i,j}^3 = a_{i,j}^4 = 1$ ,  $a_{i,j}^0 = 4$ , а  $f_{i,j}$  формировалась за счет учета граничных условий (11). Сеточные уравнения решались итерационными методами SOR (7) и SSOR (8), (9) на различных сетках при  $N = M = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$  и различных размерах тайла  $n = m = 1, 2, 4, 8, 16$ .

Расчеты выполнялись на персональном компьютере Intel(R) Core(TM) i5 – 8600 К CPU @ 3.60 GHz.

В Таблицах 1, 2 приведен коэффициент ускорения  $Q$ , равный

$$Q = \frac{T_0}{T_1},$$

$T_0$  – время счета без тайлинга,  $T_1$  – время счета с применением тайлинга (при  $Q > 1$  тайлинг выигрывает).

*Таблица 1  
Коэффициент ускорения  $Q$  для SOR*

| $N \setminus n$ | 1    | 2    | 4    | 8    | 16   |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| 8               | 0,85 | 0,99 | 1,20 | 0,94 |      |
| 16              | 1,0  | 1,54 | 2,01 | 1,56 | 1,01 |
| 32              | 0,99 | 1,84 | 2,50 | 1,93 | 1,24 |
| 64              | 1,0  | 2,00 | 2,76 | 2,12 | 1,36 |
| 128             | 1,0  | 2,06 | 2,88 | 2,21 | 1,42 |
| 256             | 1,0  | 2,11 | 2,71 | 2,20 | 1,43 |
| 512             | 1,01 | 2,16 | 2,62 | 2,16 | 1,46 |
| 1024            | 1,01 | 2,15 | 2,56 | 2,09 | 1,45 |

*Таблица 2  
Коэффициент ускорения  $Q$  для SSOR*

| $N \setminus n$ | 1    | 2    | 4    | 8    | 16   |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| 8               | 1,01 | 1,65 | 1,88 | 1,48 |      |
| 16              | 1,00 | 1,87 | 2,23 | 1,73 | 1,05 |
| 32              | 1,00 | 2,24 | 2,76 | 2,13 | 1,30 |
| 64              | 1,00 | 2,43 | 3,07 | 2,37 | 1,44 |
| 128             | 1,01 | 2,50 | 3,19 | 2,47 | 1,50 |
| 256             | 1,01 | 2,49 | 3,02 | 2,36 | 1,49 |
| 512             | 1,00 | 2,48 | 2,84 | 2,32 | 1,50 |
| 1024            | 1,01 | 2,12 | 2,37 | 1,99 | 1,26 |

Из данных таблиц видно, что: 1) оптимальный размер тайла  $n = 4$ , при котором применение тайлинга дает ускорение до 3 раз, 2) при малых  $N$  ускорение небольшое, что объясняется частой сменой содержимого сверхбыстрой памяти, 3) ускорение уменьшается при увеличении размера тайла после оптимального значения, что объясняется увеличением вклада времени выполнения арифметических операций в тайле.

**Заключение.** Проведены экспериментальные исследования применения тайлинга при решении краевых задач методом декомпозиции области на подобласти, сопрягаемые без наложения. Показано, что решение с использованием тайлинга дает ускорение до 3 раз по сравнению с классическими подходами. Указаны оптимальные размеры тайла.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00385, <https://rscf.ru/project/23-21-00385/>*

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf An Introduction to Domain Decomposition Methods: algorithms, theory and parallel implementation. – US: SIAM, 2015.–238 p.
2. Козырев А.Н., Свешников В.М. О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2017. – Т. 6. № 2. – С. 5–21.
3. V.Ya. Steinberg, A.A. Vasilenko, V.V. Veselovskiy, N.A. Zhivykh SOLVERS FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH BLOCK-BAND MATRICES./// Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS) – 2021. – V. 14. – № 3. P. 106–112.
4. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН. 2001. – 318 с.
5. Козырев А.Н., Свешников В.М. Экспериментальное исследование эффективности решения 2D краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток // Сиб. Журн. Выч. Матем. – 2021. – №3. – С. 277–288.

6. Свешников В.М. Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12. № 3(39). С.99 – 109.

УДК 519.6

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В СТЕКЛОПАКЕТАХ**

П.А. Сомова, Е.И. Гурина

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: p.a.somova@gmail.com

***Аннотация.** В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования тепловых потерь в составной конструкции теплоизоляционного окна с наполнением межстекольного пространства однокамерного и двухкамерного стеклопакетов осушенным воздухом.*

***Ключевые слова.** Уравнение теплопроводности, имитационное моделирование, метод конечных разностей, Ansys Fluent, двухкамерные стеклопакеты.*

## **NUMERICAL SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN MULTIPLE-GLAZED WINDOWS**

P.A. Somova, E.I. Gurina

National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: p.a.somova@gmail.com

***Abstract.** The actual problem of modeling heat losses in the composite structure of a heat-insulating window with filling the interstitial space of single-glazed and double-glazed windows with dried air is considered in this paper.*

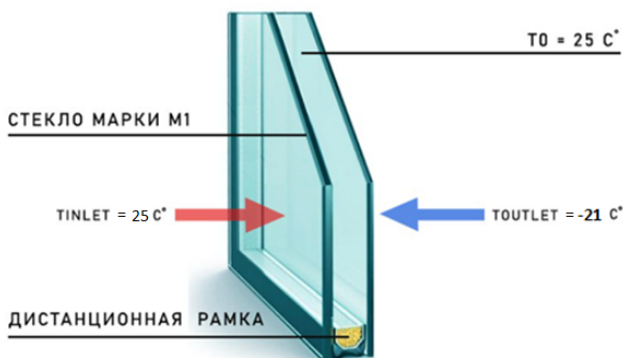
***Keywords.** The equation of thermal conductivity, simulation modeling, finite difference method, Ansys Fluent, double-glazed windows.*

**Введение.** Основной составляющей частью любого современного деревянного, пластикового или алюминиевого окна, несомненно, является стеклопакет. Свойства стеклопакета являются основополагающими в общих свойствах оконного блока, так как сам стеклопакет занимает от 65 % до 90% площади всего окна. Под стеклопакетом понима-



ется конструкция, состоящая из двух или нескольких стекол, разделенных по периметру дистанционной рамкой, наполненной влагопоглотителем, и склеенных герметиком. Образованные герметические камеры заполняются инертными газами или осушенным воздухом [1].

**Физическая постановка задачи.** В работе анализируется распространение тепла в составной конструкции теплоизоляционного окна. В наружной и внутренней створках которого установлены однокамерный и двухкамерный стеклопакеты. Величина воздушного промежутка между стеклопакетами – 200 мм. Формула остекления  $4M_1 - 16 - 4M_1 - 200 - 4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$ . Поставленная в работе задача декомпозировалась на более мелкие подзадачи. На первом этапе моделировался процесс распространения тепла внутри однокамерного стеклопакета с формулой остекления  $4M_1 - 16 - 4M_1$  с наполнением межстекольного пространства осушенным воздухом (Рис.1).



*Рис. 1. Геометрия однокамерного стеклопакета*

На втором этапе моделировался процесс распространения тепла внутри двухкамерного стеклопакета с формулой остекления  $4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$ , также на основе осушенного воздуха (Рис.2). Считается, что однокамерный стеклопакет, заполненный осушенным воздухом и не имеющий стекло со специальными покрытиями (энергосберегающее мягкое покрытие), теряет около двух третей тепла из помещения за счет излучения и одну треть – за счет теплопроводности и конвекции [2,3]. В стеклопакетах с толщиной дистанционной рамки от 6 до 10 мм ввиду вязкости используемого газа или смеси газов практически отсутствует конвективный поток, и тепло уходит только

за счет теплопроводности [2,4]. Начиная с толщины воздушной камеры в 12 мм и выше теплотери стеклопакета за счет конвекции увеличиваются. До 16 мм явление конвекции тоже присутствует, но вклад его в общие теплотери стеклопакета мал и перекрывается величиной теплосопrotивления осушенного воздуха или инертного газа.

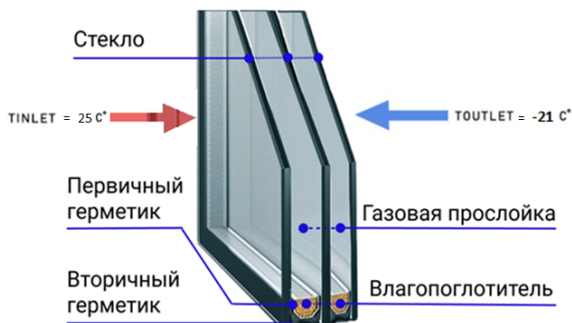


Рис. 2. Геометрия двухкамерного стеклопакета

На первом и втором этапах моделирования в работе концентрируется внимание только на одном из основных механизмов переноса тепла – теплопроводности. Теплотери в однокамерном и двухкамерном стеклопакетах за счет конвекции не учитываются. На третьем этапе проводилось имитационное моделирование процесса распространения тепла внутри всей составной конструкции теплоизоляционного окна, где отдельное внимание уделяется теплотерям за счет наличия конвективного потока, возникающего в воздушном промежутке толщиной 200 мм между стеклопакетами.

**Математическая постановка задачи.** Рассмотрим конструкцию двухкамерного стеклопакета. В начальный момент времени все пять частей (Рис.3) стеклопакета имеют одинаковую температуру  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ .

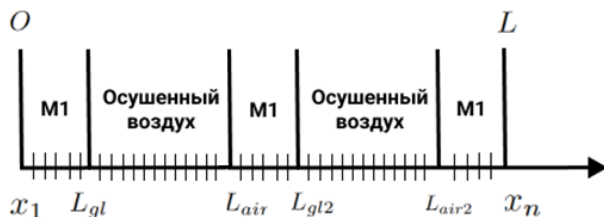


Рис. 3. Иллюстрация разностного разбиения расчетной области

$X_1, L_{gl}, L_{gl2}, L_{air}, L_{air2} X_N$  – координаты граничных узлов

Толщины каждого из слоёв конструкции принимаются следующими: 1, 3 и 5 слои (стекло марки М1) -  $l_1 = l_3 = l_5 = 4$  мм; 2 и 4 слои (осушенный воздух) -  $l_2 = l_4 = 14$  мм. На внутренней стороне (помещение) стеклопакета поддерживается постоянная температура  $T_{room} = 25^\circ\text{C}$ . Температура на внешней стороне конструкции (атмосфера) составляет  $T_{out} = -21^\circ\text{C}$ .

В процессе теплообмена участвуют пять слоев с различными теплофизическими свойствами, для каждого из слоев стеклопакета будем использовать свое уравнение теплопроводности с соответствующими значениями  $\rho$  (плотность материала),  $\lambda$  (коэффициент теплопроводности материала) и  $C_p$  (удельная теплоемкость материала):

$$\rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_{gl}; \quad (1.1)$$

$$\rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad L_{gl} < x < L_{air}; \quad (1.2)$$

$$\rho_3 C_{p3} \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, \quad L_{air} < x < L_{gl2}; \quad (1.3)$$

$$\rho_4 C_{p4} \frac{\partial T_4}{\partial x} = \lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}, \quad L_{gl2} < x < L_{air2}; \quad (1.4)$$

$$\rho_5 C_{p5} \frac{\partial T_5}{\partial x} = \lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2}, \quad L_{air2} < x < L. \quad (1.5)$$

$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 1,15 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ;  $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = 2560 \text{ (кг}/\text{м}^3)$ ;  
 $C_{p1} = C_{p3} = C_{p5} = 670 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$  - параметры стекла марки М1;  
 $\lambda_2 = \lambda_4 = 0,0257 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ;  $\rho_2 = \rho_4 = 1,186 \text{ (кг}/\text{м}^3)$ ;  $C_{p2} = C_{p4} = 1005 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$  - параметры осушенного воздуха.

В начальный момент времени температура каждой части конструкции принимается одинаковой и равной:

$$T(t, x)|_{t=0} = 25^\circ\text{C}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.6),$$

на левой границе рассматривается граничное условие I рода:  $T_{room}(t, x)|_{x=0} = 25^\circ\text{C}, \quad t > 0 \quad (1.7)$ .

Граничные условия IV рода действуют в зоне контакта стекла и межстекольного пространства, заполненного осушенным воздухом:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=L_{gl}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_{gl}} \\ T_1(t, L_{gl}) = T_2(t, L_{gl}) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_{air}} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_{air}} \\ T_2(t, L_{air}) = T_3(t, L_{air}) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_{gl2}} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=L_{gl2}} \\ T_3(t, L_{gl2}) = T_4(t, L_{gl2}) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=L_{air2}} = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} |_{x=L_{air2}} \\ T_4(t, L_{air2}) = T_5(t, L_{air2}) \end{cases}$$

На выходе из рассматриваемой области действует граничное условие III рода:  $\lambda_5 \left( \frac{\partial T_5}{\partial x} \right) = k(T_5 - T_{cp})$ ,  $t > 0$  (1.9), где  $k = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  – коэффициент теплоотдачи между стеклом и воздухом. Дифференциальные уравнения в частных производных (1.1-1.5) с начально-краевыми условиями (1.6) - (1.9), а также иными условиями однозначности (геометрическими, физическими) составляют полную математическую формулировку рассматриваемой задачи теплопроводности. Численное решение поставленной задачи в виде программного кода на C++ выполнялось на основе МКР с использованием явной разностной схемы. Для верификации разработанных программ было проведено сравнение результатов численного решения полученного при использовании явной разностной схемы, с численным решением, полученным в программном комплексе Ansys Fluent.

**Результаты численного моделирования.** Для оценки теплофизических свойств стеклопакета была использована гипотетическая модель (Рис.4) в которой стеклопакет был установлен между небольшой комнатой (1500\*1500 мм) и доменом атмосферы (4000\*4000 мм).

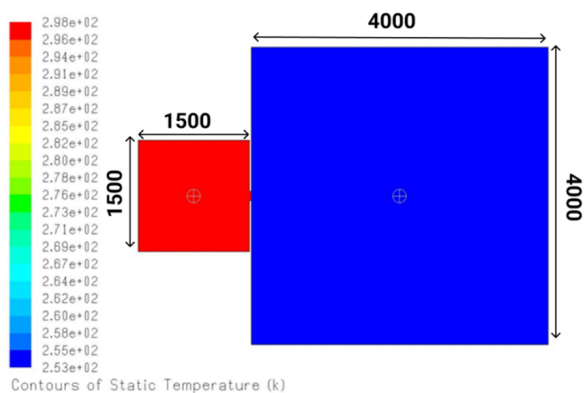


Рис. 4. Распределение температуры в расчётных доменах в начальный момент времени

Ниже представлена визуализация протекающего физического процесса вдоль рассматриваемой области с помощью программного комплекса Ansys Fluent.

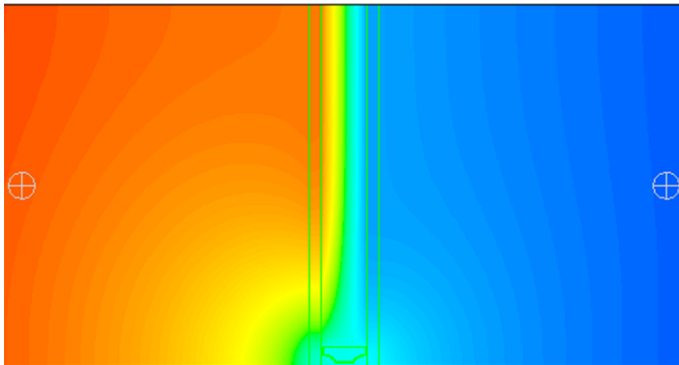


Рис. 5. Распределение температуры по толщине конструкции однокамерного стеклопакета спустя 5 часов

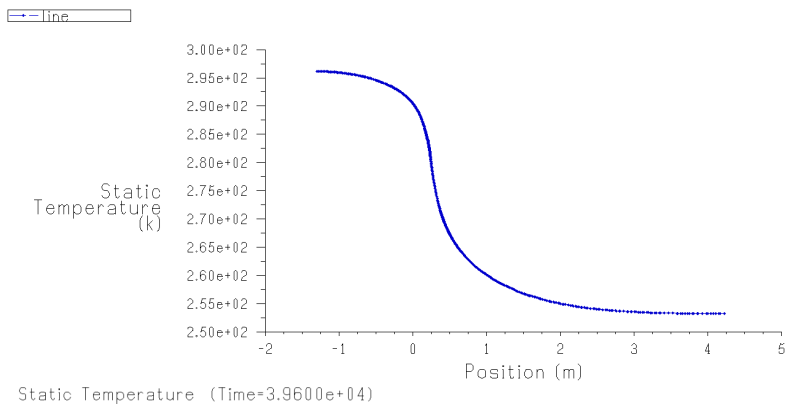


Рис. 6. Распределение температуры вдоль средней линии расчетной области спустя 11 часов (однокамерный стеклопакет)

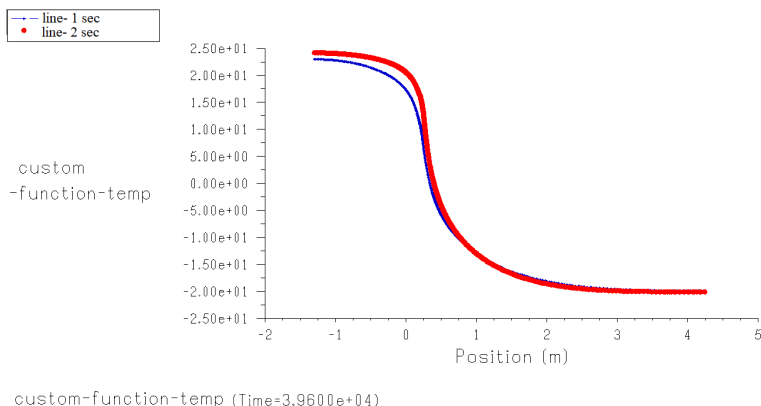


Рис. 7. Распределение температуры вдоль средней линии расчетной области спустя 11 часов (сравнение однокамерного и двухкамерного стеклопакетов), °C

Количественные показатели результатов расчета показали, что при использовании в расчетной модели двухкамерного стеклопакета, в комнате спустя 11 часов будет на 9.4% теплее, чем при использовании однокамерного стеклопакета. Если площадь остекления дома или здания высока, то теплопотери при использовании однокамерных конструкций будут значительно выше, чем при использовании двухкамерных стеклопакетов.

Результаты математического моделирования процесса распространения тепла внутри всей составной конструкции теплоизоляционного окна с воздушным промежутком толщиной 200 мм между стеклопакетами будут представлены во второй части статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 24700–99. Блоки оконные деревянные со стеклопакетами. ТУ. — М.: Госстрой России; ГУП ЦПП, 2000. — 52 с.
2. Energy Research & Social Science Volume 52, June 2019, Pages 144-158. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214629618310314>
3. ГОСТ 24866–2014 Стеклопакеты клееные. Технические условия – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200120572>

4. Сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 2023, страницы 65-76: Математическое моделирование влияния теплофизических свойств на эффективность стеклопакетов. Ч.1. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?pff=1&id=54155544>
5. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. — Томск: Изд-во ТПУ, 2007. — 172с.

УДК 519.6:532.4

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В УЛИЧНОМ КАНЬОНЕ**

А.В. Старченко, Е.А. Данилкин, Д.В. Лещинский

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: starch@math.tsu.ru

***Аннотация.** Разработана численная модель для исследования влияния неравномерности солнечного нагрева стен уличного каньона на турбулентное течение и перенос примеси. Исследовано влияние угла падения солнечных лучей и теплофизических свойств стен на интенсивность выноса примеси, поступающей от проезжающих в рассматриваемой области автомобилей.*

***Ключевые слова.** Уравнения Рейнольдса,  $k$ - $\epsilon$  модель турбулентности, солнечное излучение, уличный каньон, перенос примеси.*

## **NUMERICAL SIMULATION OF THE SOLAR RADIATION INFLUENCE ON POLLUTION TRANSPORT IN A STREET CANYON**

A.V. Starchenko, E.A. Danilkin, D.V. Leshzhinski

National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: starch@math.tsu.ru

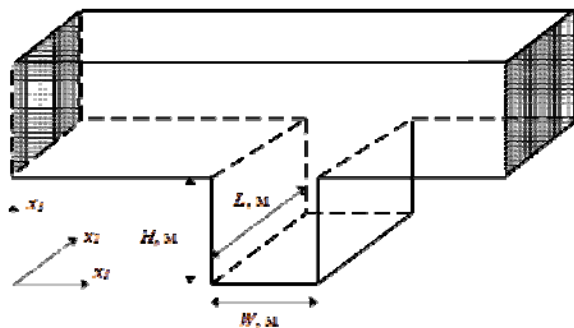
***Abstract.** A numerical model has been developed to study the effect of solar heating of the walls of a street canyon on turbulent flow and air pollutant transport. The influence of the angle of incidence of sunlight and the thermophysical properties of the walls on the intensity of the removal of vehicle pollutants in the area under consideration is investigated.*

***Keywords.** Reynolds equations,  $k$ - $\epsilon$  turbulence model, solar radiation, street canyon, air pollutant transport.*



**Введение.** Целью работы является численное исследование влияния неравномерности солнечного нагрева образующих уличный каньон поверхностей, в котором интенсивно движется автомобильный транспорт.

Рассматривается стационарное неизотермическое турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости в уличном каньоне, образованного двумя протяженными зданиями. Ось  $Ox_1$  ориентирована на восток,  $Ox_2$  – на север (Рис.1). Движение воздуха над зданиями направлено вдоль оси  $Ox_1$ . Теплофизические свойства стен, крыш зданий и дорожного полотна ( $x_3 = 0$ ) могут различаться. В результате солнечного излучения в светлое время суток различные участки образующих уличный каньона могут нагреваться. Для представления силы плавучести используется приближение Буссинеска. Внизу уличного каньона ближе к середине располагаются линейные источники выбросов автотранспорта, расположенные на небольшой высоте над поверхностью и ориентированы параллельно уличным зданиям. Исследуются значения концентрации примеси на уровне пешеходов и вдоль вертикальных поверхностей.



*Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи*

Численное моделирование рассматриваемого процесса проводится с использованием уравнений Рейнольдса, теплообмена и переноса примеси, которые замыкаются с помощью градиентных соотношений Буссинеска и  $k$ - $\epsilon$ ps модели турбулентности, учитывающей влияние силы плавучести на турбулентную структуру потока. Для описания переноса теплового излучения внутри каньона применялось P-1 приближение метода сферических гармоник, которое в настоящее время широко используется при моделировании рассматриваемых процессов

[2]. Кроме того, учитывается процесс переноса тепла в стенах зданий. Задача решается численно методом конечного объема, алгоритм SIMPLE привлекается для согласования полей скорости и давления. Разработан эффективный алгоритм вычисления температуры поверхностей в уличном каньоне.

Результаты проведенных численных исследований показали, что интенсивный солнечный нагрев части или всей наветренной стороны может приводить к образованию двухвихревой картины течения в уличном каньоне с накоплением примеси в зонах движения пешеходов.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. – Томск.: Изд-во Том. ун-та, 2015. – 252с.
2. Yang H., Chen G., Wang D., Hang D., Li Q., Wang Q. Influences of street aspect ratios and realistic solar heating on convective heat transfer and ventilation in full-scale 2D street canyons // Building and Environment, 2021. V. 204, 108125

УДК 614.841.1

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В КАБЕЛЬНЫХ ПРОХОДКАХ ПРИ ПОЖАРЕ**

И.Р. Хасанов, А.В. Варламкин

ФГБУ ВНИИПО МЧС России,  
Россия, г. Балашиха, мкр. ВНИИПО, 12, 143903

E-mail: [irhas@rambler.ru](mailto:irhas@rambler.ru)

***Аннотация.** Для численной реализации предложенной математической модели изучения процессов теплообмена в кабельных проходках при пожаре использовался программный пакет, в основу которого положен метод конечных элементов. Даны результаты расчетов теплообмена в трех типовых кабельных проходках.*

***Ключевые слова.** Теплообмен, математическое моделирование, кабельные проходки, пожар, огнестойкость.*

**Введение.** Методика проведения огневых испытаний кабельных проходок на огнестойкость предполагает измерение температуры нагрева только на необогреваемой поверхности [1]. В связи с этим выполнено компьютерное моделирование механизма теплообмена между элементами кабельных изделий и конструкций кабельных проходок при тепловом воздействии пожара.

**Постановка задачи.** В основу математической модели процессов теплообмена в кабельной проходке положено уравнение теплопроводности, которое описывает распределение температуры внутри кабельных проходок [2]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}[\lambda \cdot \operatorname{grad}(T)] + q_v,$$

где:  $T$  – температура, °C;  $t$  – время, с;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $C_p$  – теплоёмкость, Дж/(кг·°C);  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·°C);  $q_v$  – внутренние источники или стоки тепла, Вт/м<sup>3</sup>.

Основными механизмами теплопередачи на границе кабельной проходки являются лучистый и конвективный теплообмен, а величина теплового потока может быть записана как их сумма в виде:

$$q = \alpha(T - T_{\text{ср}}) + \varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T^4 - T_{\text{ср}}^4),$$

где:  $q$  – тепловой поток от внешней среды к телу, Вт/м<sup>2</sup>;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup> °C);  $T_{\text{ср}}$  – температура окружающей сре-

ды, °С;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведённая степень черноты системы;  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана [3].

Температура среды в огневой камере  $T_n$  задается стандартным температурным режимом огневых испытаний (пожара) при начальной температуре среды  $T_0$  [1]. Со стороны огневой камеры (индекс 1) тепловой поток  $q_{1\text{ст}}$  на стенку кабельной проходки (индекс ст) и поток  $q_{1\text{к}}$  на кабель (индекс к) зависят от температуры и времени и описываются зависимостями:

$$\begin{aligned}q_{1\text{ст}}(T, t) &= \alpha_{1\text{ст}}(T_{1\text{ст}} - T_n) + \varepsilon_{\text{пр}1\text{ст}}\sigma(T_{1\text{ст}}^4 - T_n^4), \\q_{1\text{к}}(T, t) &= \alpha_{1\text{к}}(T_{1\text{к}} - T_n) + \varepsilon_{\text{пр}1\text{к}}\sigma(T_{1\text{к}}^4 - T_n^4).\end{aligned}$$

С внешней необогреваемой стороны кабельной проходки (индекс 2) происходит охлаждение за счёт естественной конвекции и сброса тепла излучением. Тепловые потоки на стенке  $q_{2\text{ст}}$  и кабеле  $q_{2\text{к}}$ :

$$\begin{aligned}q_{2\text{ст}}(T, t) &= \alpha_{2\text{ст}}(T_{2\text{ст}} - T_0) + \varepsilon_{\text{пр}2\text{ст}}\sigma(T_{2\text{ст}}^4 - T_0^4); \\q_{2\text{к}}(T, t) &= \alpha_{2\text{к}}(T_{2\text{к}} - T_0) + \varepsilon_{\text{пр}2\text{к}}\sigma(T_{2\text{к}}^4 - T_0^4).\end{aligned}$$

Связь теплового потока и температуры описывается законом Фурье. Начальные условия определяют состояние системы в начальный момент времени:  $T = T_0$ .

Для численной реализации предложенной математической модели использовался программный пакет Salome-Meca [4], в основу которого положен метод конечных элементов.

**Результаты.** Моделировались процессы теплообмена в трех наиболее распространенных кабельных проходках размерами 0,25x0,25x0,3 м. Конструкция кабельной проходки № 1 состояла из плит негорючей минеральной ваты толщиной 0,1 м с обоих торцов с расположенным в центральной части кабелем и воздушным зазором внутри проходки размером 0,1 м. Кабельная проходка № 2 отличалась от № 1 заполнением внутреннего пространства силиконовой противопожарной пеной. В кабельной проходке № 3 противопожарной пеной на основе пенополиуретана заполнялось все внутреннее пространство.

Результаты компьютерного моделирования показали, что кабель является основным элементом, участвующим в теплопереносе из области огневой камеры. Заполнение внутреннего пространства противопожарной пеной в кабельных проходках № 2 и № 3 способствует кондуктивному теплообмену. Распространение тепла происходит по медной жиле кабеля с последующим нагревом материала изоляции и оболочки. Результаты расчетов показали, что наиболее опасной в отношении нагрева кабеля и огнестойкости конструкции является кабельная проходка 3-го вида. Значения температур на необогреваемой

поверхности проходки превысили критическую температуру 145 °С на 72-й мин теплового воздействия пожара.

**Заключение.** Исследованы закономерности теплообмена в кабельных проходках при тепловом воздействии пожара в зависимости от характеристик кабельных проходок. Показано, что наиболее опасной в отношении нагрева кабеля и снижения огнестойкости конструкции является кабельная проходка 3-го вида с заполнением всего внутреннего пространства противопожарной пеной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хасанов И.Р., Варламкин А.А. Влияние конструкции кабельных проходок на их огнестойкость // Пожарная безопасность. - 2019. - № 3. - С. 57-63.
2. Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. – М.: Высшая школа, 1975. – 495 с.
3. Кошмаров Ю.А. Прогнозирование опасных факторов пожара в помещении. – М.: Академия ГПС МВД России, 2000. – 118 с.
4. The Salome-Meca and Code Aster Home Page [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.code-aster.org>. (дата обращения 20.10.2021).

## COMPUTER SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN CABLE PENETRATIONS IN CASE OF FIRE

I.R. Khasanov, A.V. Varlamkin

FGBU VNIPO EMERCOM of Russia,  
Russia, Balashikha, mkr. VNIPO, 12, 143903

E-mail: [irhas@rambler.ru](mailto:irhas@rambler.ru)

**Abstract.** *A software package based on the finite element method was used to numerically implement the proposed mathematical model for studying heat transfer processes in cable penetrations during a fire. The results of calculations of heat exchange in three typical cable penetrations are given.*

**Introduction.** The method of conducting fire tests of cable penetrations for fire resistance involves measuring the heating temperature only on an unheated surface [1]. In this regard, a computer simulation of the mechanism of heat exchange between the elements of cable products and struc-

tures of cable penetrations under the thermal effects of fire has been performed.

**Research methods.** The mathematical model of heat exchange processes in cable sinking is based on the equation of thermal conductivity, which describes the temperature distribution inside cable sinking [2]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\lambda \cdot \text{grad}(T)] + q_v,$$

where:  $T$  – temperature, °C;  $t$  – time, sec;  $\rho$  – density, kg/m<sup>3</sup>;  $C_p$  – heat capacity, J/(kg °C);  $\lambda$  – coefficient of thermal conductivity, W/(m °C);  $q_v$  – internal sources or sinks of heat, W/m<sup>3</sup>.

The main mechanisms of heat transfer at the boundary of the cable penetration are radiant and convective heat exchange, and the value of the heat flux can be written as their sum in the form:

$$q = \alpha(T - T_{sr}) + \varepsilon_{pr}\sigma(T^4 - T_{sr}^4),$$

where:  $q$  – heat flow from the external environment to the body, W/m<sup>2</sup>;  $\alpha$  – heat transfer coefficient, W/(m<sup>2</sup> °C);  $T_{sr}$  – the ambient temperature, °C;  $\varepsilon_{pr}$  – the reduced degree of blackness of the system;  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>) is the Stefan-Boltzmann constant [3].

The temperature of the medium in the  $T_n$  fire chamber is set by the standard temperature regime of fire tests at the initial temperature of the medium  $T_0$  [1]. From the side of the firing chamber (index 1), the heat flow  $q_{1st}$  to the wall of the cable penetration (index st) and the flow to the cable (index k) depend on temperature and time and are described by dependencies:

$$q_{1st}(T, t) = \alpha_{1cr}(T_{1st} - T_n) + \varepsilon_{pr1st}\sigma(T_{1st}^4 - T_n^4),$$

$$q_{1k}(T, t) = \alpha_{1k}(T_{1k} - T_n) + \varepsilon_{pr1k}\sigma(T_{1k}^4 - T_n^4).$$

From the outside of the unheated side of the cable passage (index 2), cooling occurs due to natural convection and heat release by radiation. Heat flows on the wall  $q_{2st}$  and cable  $q_{2k}$ :

$$q_{2st}(T, t) = \alpha_{2st}(T_{2st} - T_0) + \varepsilon_{pr2st}\sigma(T_{2st}^4 - T_0^4);$$

$$q_{2k}(T, t) = \alpha_{2k}(T_{2k} - T_0) + \varepsilon_{pr2k}\sigma(T_{2k}^4 - T_0^4).$$

The relationship between heat flow and temperature is described by Fourier's law. The initial conditions determine the state of the system at the initial time:  $T = T_0$ .

For the numerical implementation of the proposed mathematical model, the Salome-Meca software package [4] was used, which is based on the finite element method.

**Results.** Heat exchange processes were modeled in the three most common cable penetrations with dimensions of 0,25x0,25x0,3 m. The design of cable penetration number 1 consisted of plates of nonflammable mineral

wool with a thickness of 0,1 m from both ends with a cable located in the central part and an air gap inside the penetration of 0,1 m. Cable penetration number 2 differed from number 1 by filling the inner space with silicone fire foam. In cable passage number 3, the entire interior space was filled with fire-fighting foam based on polyurethane foam.

The results of computer simulation showed that the cable is the main element involved in heat transfer from the area of the fire chamber. Filling the internal space with fire-fighting foam in cable penetrations number 2 and number 3 contributes to conductive heat exchange. Heat propagation occurs along the copper core of the cable, followed by heating of the insulation material and the shell. The results of the calculations showed that the most dangerous in terms of cable heating and fire resistance of the structure is the cable penetration of the 3rd type. The temperature values on the unheated surface of the penetration exceeded the critical temperature of 145 °C at the 72nd minute of the thermal effect of the fire.

**Conclusion.** The regularities of heat exchange in cable penetrations under the thermal effect of fire, depending on the characteristics of cable penetrations, are investigated. It is shown that the most dangerous in terms of heating the cable and reducing the fire resistance of the structure is the cable penetration of the 3rd type with filling the entire interior space with fire foam.

## REFERENCES

1. Khasanov, I., Varlamkin, A. (2019). The influence of the design of cable penetrations on their fire resistance. *Fire safety*, no. 3, pp. 57-63.
2. Bolgarsky, A., Mukhachev, G., & Shchukin, V. (1975). *Thermodynamics and heat transfer*. Moscow: Higher School, 495 p.
3. Koshmarov, Yu. (2000). *Forecasting of fire hazards in the room*. Moscow: Academy of GPS of the Ministry of Internal Affairs of Russia, 118 p.
4. The Salome-Meca and Code Aster Home Page [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.code-aster.org>. (accessed 20.10.2021).

УДК 536.49: 544.3

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗА КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДАМИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ И ЛАЗЕРНОЙ НАПЛАВКИ**

Ю.А. Чумаков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
физики прочности и материаловедения Сибирского отделения  
Российской академии наук,  
Россия, г. Томск, пр. Академический, 2/4, 634055

E-mail: chya@ispms.ru

***Аннотация.** В настоящей работе представлены результаты моделирования процесса синтеза покрытия системы Ti-Al на подложке при условии управления подвижным тепловым источником. Для описания процесса синтеза используется два подхода. Первый подход заключается в описании последовательности реакции на основе формальной кинетики (макрокинетики). Во втором подходе для описания механизма фазообразования используется двухуровневая модель, которая состоит из двух частей: на макроуровне – решается тепловая задача, на мезоуровне решается задача в квазистационарном приближении и находится состав в каждой точке образца. Показано, что рассчитанные при использовании различных подходов среднеинтегральные концентрации фаз имеют близкие значения.*

***Ключевые слова.** Синтез композитов, многоуровневое моделирование, Ti-Al*

## **SIMULATION OF THE COMPOSITE SYNTHESIS BY ELECTRON-BEAM AND LASER CLADDING**

Yu.A. Chumakov

Institution of Science Institute of Strength Physics and Materials Science,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, Tomsk,  
Akademichesky Ave., 2/4, 634055

E-mail: chya@ispms.ru



**Abstract.** This paper presents the results of modeling the synthesis process of a coating of the Ti-Al system on a substrate under the condition of controlling a moving heat source. Two approaches are used to describe the synthesis process. The first approach is to describe the reaction scheme based on formal kinetics (macrokinetics). In the second approach, to describe the mechanism of phase formation, a two-level model is used, which consists of two parts: at the macrolevel, the thermal problem is solved; at the mesolevel, the problem is solved in a quasi-stationary approximation and the composition is found at each point of the sample. It is shown that the mean integral concentrations of phases calculated using different approaches have close values.

**Keywords.** Composite synthesis, multilevel modeling, Ti-Al.

**Введение.** В современных технологиях синтеза новых материалов довольно остро стоит проблема расширения спектра используемых композиций и прогнозирования состава, структуры и свойств продуктов синтеза. Для решения этих проблем активно привлекают математическое моделирование с использованием, как коммерческих программ, так и специально разрабатываемых довольно детальных моделей. Среди них большую роль играют мультифизическое моделирование и многоуровневые модели.

В настоящей работе, на примере системы Ti-Al, рассматриваются два различных подхода для моделирования процесса синтеза композиционного покрытия.

**Постановка задачи.** В простейшем случае образца в форме тонкой двухслойной пластины распределением температуры по толщине пластины пренебрегаем, считая ее «термически тонкой» и учитывая, что ее толщина много меньше ее длины и ширины; химическим взаимодействием покрытия и подложки также пренебрегаем. Принимаем, что внешний источник тепла однородно распределен вдоль одной из координатных осей на плоскости и движется с заданной скоростью  $V_x$  вдоль другой оси в этой же плоскости. Тогда тепловая часть задачи сводится к одномерному уравнению теплопроводности

$$U \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( W \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{W_{ext} + W_{ch} - H(T)}{h_A + h_{B0}} \quad (1)$$

где

$$W = \lambda_A \frac{h_A}{h_A + h_{B0}} + \lambda_B \frac{h_B}{h_A + h_{B0}} -$$

эквивалентный коэффициент теплопроводности;

$$U = c_A \rho_A \frac{h_A}{h_A + h_{B0}} + c_B \rho_B \frac{h_B}{h_A + h_{B0}} -$$

эквивалентная объемная теплоемкость;  $\lambda_A, \lambda_B$  – коэффициенты теплопроводности;  $c_A, \rho_A, c_B, \rho_B$  – теплоемкости и плотности подложки (А) и покрытия (В);  $h_A, h_B$  – толщины слоев;  $W_{ext}$  – внешний источник тепла; функция  $H(T)$  описывает потери тепла конвекцией и излучением

$$H(T) = \sigma \varepsilon (T^4 - T_e^4) + \alpha_{eff} (T - T_e);$$

$\alpha_{eff}$  – коэффициент теплоотдачи;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  – показатель черноты;  $T_e$  – температура окружающей среды;

$$W_{ch} = \sum_i Q_i \Phi_i, \Phi_i - \text{химическое тепловыделение} \left( \Phi_i = k_i \frac{d\eta_i}{dt} - \text{макро-} \right.$$

кинетическая модель,  $\Phi_i = \frac{d\eta_i}{dt}$  – двухуровневая модель),  $Q_i$  – теплота реакций.

Внешний источник тепла задан следующей функцией:

$$W_{ext}(x, t) = q_0 \exp\left(-\frac{(x - V_x t)^2}{a_x^2}\right) \cdot \phi(T, \eta_a)$$

где  $q_0$  – максимальная плотность мощности теплового источника;  $a_x$  – эффективный радиус электронного или лазерного луча,  $V_x$  – скорость его движения вдоль оси Ох,  $\phi(T, \eta_a)$  – функция, характеризующая вид источника.

Для описания плавления вводим минимальную и максимальную температуры плавления  $T_S$  и  $T_L$ . В этом интервале доля жидкой фазы  $\eta_L$  изменяется по некоторому закону.

$$\eta_L = 0, T \leq T_S; \eta_L = \left(\frac{T - T_S}{T_L - T_S}\right)^2, T_S < T \leq T_L; \eta_L = 1, T > T_L$$

Плавление тепла учитывается через изменения эффективной теплоемкости. На торцах пластины источник и стоки тепла отсутствуют. В начальный момент времени имеем:  $T = T_0$

**Результаты.** Распределение температуры по координате в разные моменты времени для модели с химическими превращениями показано на рис. 1. Видим, что при использовании любого подхода для выбранного набора параметров имеет место выход на квазистационарный режим, которому соответствует некоторое квазистационарное значение температуры. Перегиб на кривых связан с началом плавления. Величины среднеинтегральных концентраций (по всей длине образца конечных размеров) различаются. Это связано как

с неточными данными по формально кинетическим параметрам, так и с неопределенностью коэффициентов диффузии.

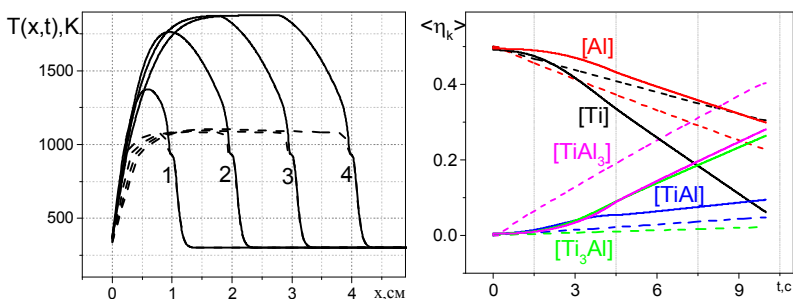


Рис. 1. Температура и суммарная концентрация фаз.  $q_0=1500$  Вт/см<sup>2</sup>

1.  $t=2$  с; 2.  $t=4$  с; 3.  $t=6$  с; 4.  $t=8$  с. Пунктирные линии – формально-кинетический подход; сплошные линии – двухуровневая модель

**Заключение.** В работе на примере системы Ti-Al осуществлено сравнение двух подходов к описанию кинетики превращения. Показано, что формально-кинетический подход и двухуровневый подход с введением представления о реакционных ячейках эквивалентны. Построение двухуровневой модели сопряжено с увеличением размерности задачи. На настоящий момент более корректным представляется формально-кинетический подход.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-11-00100, <https://rscf.ru/project/22-11-00100/>.



**Секция 3**  
**Геометрия и топология**

## EUCLIDEAN VOLUMES OF A CONE MANIFOLDS ARE ALGEBRAIC NUMBERS

N. Abrosimov

Sobolev Institute of Mathematics,  
pr. Koptyuga, 4, 630090, Novosibirsk, Russia

E-mail: abrosimov@math.nsc.ru

**Abstract.** *The talk is based on our joint work with Alexander Kolpakov (University of Neuchâtel) and Alexander Mednykh (Sobolev Institute of Mathematics). The hyperbolic structure on a 3-dimensional cone-manifold with a knot as singularity can often be deformed into a limiting Euclidean structure. In the present work [1] we show that the respective normalised Euclidean volume is always an algebraic number, which is reminiscent of Sabitov's theorem (the Bellows Conjecture). This fact also stands in contrast to hyperbolic volumes whose number-theoretic nature is usually quite complicated.*

**Keywords.** *3-dimensional cone-manifold, hyperbolic structure, normalised Euclidean volume, A-polynomial, Riley polynomial*

The main result of our work is as follows.

**Theorem 1.** *Let  $C_\alpha = C_\alpha(M, K)$  be a cone-manifold with underlying 3-manifold  $M$  and singular set a knot  $K$  with cone angle  $\alpha$ . Assume that fundamental group  $\pi_1(M \setminus K)$  has a holonomy representation in  $SL_2(\mathbb{C})$ , and  $C_\alpha$  admits a hyperbolic structure for  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$  that degenerates into a Euclidean structure as  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ . Then the normalised Euclidean volume of  $C_{\alpha_0}$  is an algebraic number.*

The  $A$ -polynomial of a knot was introduced in [2] and has become a powerful knot invariant. It encodes not only topological but also geometric information about the knot complement, especially in the case of hyperbolic knots. The notion of  $A$ -polynomial can be generalised to the case of hyperbolic manifolds with a single cusp [3, 2].

In the proof of the main result we use a modified version of the  $A$ -polynomial, while the standard one was introduced by Cooper, Culler, Gillet, Long, and Shalen in [2]. Our version contributes the real length of the singular geodesic instead of the complex one, and will be called the  $Ri$ -

*ley polynomial*. It appears very suitable for computational purposes. We also provide a pseudocode that computes the minimal polynomial of the normalised volume  $\text{vol } C_{\alpha_0}$ . This code can be used in any computer algebra system capable of computing resultants and factorising multivariable polynomials, such as SageMath or Mathematica.

The other concept that we deal with, namely *degeneration and regeneration of hyperbolic cone-manifold structures*, has been studied in many works over the years. In this regard, we refer to the results of Boileau, Leeb, and Porti [4, 5, 6].

We shall assume that  $K$  is a *hyperbolic knot* (i.e.  $C_0 = C_0(M, K) = M \setminus K$  has a complete hyperbolic metric of finite volume) and that a hyperbolic structure on the cone-manifold  $C_\alpha$  exists for any  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$ , where  $\alpha_0 > \varepsilon > 0$ , and degenerates (up to rescaling) into a Euclidean structure as  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ .

On the other hand, given a Euclidean cone manifold  $C_{\alpha_0}$ , a hyperbolic or spherical structure can often be “*regenerated*”: namely, it will be hyperbolic for  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$  and spherical for  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ . Such cone manifolds exist under some weak cohomological assumptions [6].

Since  $C_\alpha$  converges in the Gromov–Hausdorff metric (after an appropriate rescaling) to a Euclidean cone-manifold  $C_{\alpha_0}$ , one can define the associated *normalised Euclidean volume* as  $\text{vol } C_{\alpha_0} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\text{Vol } C_\alpha}{l_\alpha^3}$ , where  $l_\alpha = l_\alpha(M, K)$  is the length of the singular geodesic of  $C_\alpha = C_\alpha(M, K)$ . From here on “*vol*” denotes the normalised Euclidean volume in contrast to “*Vol*” that refers to the standard hyperbolic one. Such a construction for the normalised Euclidean volume appears in [6].

The hyperbolic volume of  $C_\alpha$  is an important quantity: due to the Mostow–Prasad–Kojima rigidity, the volume of  $C_0$  is a topological invariant whenever it admits a complete hyperbolic metric (of finite volume) [7]. There is also a large number of results concerning rigidity of cone-manifolds in the hyperbolic and other geometries [8].

Concerning the normalised Euclidean volume the following results are known. Local rigidity of hyperbolic cone manifolds was proven in [9] for the case of knot and link cone manifolds and in [8, 10] for the general case

of 3-dimensional cone manifolds with cone angles less or equal to  $\pi$ . Global rigidity also takes place under some additional conditions. Namely, it was shown in [11] that if  $(M, K)$  is not a Seifert pair then both hyperbolic and spherical structures can be “regenerated” from the Euclidean one and global rigidity follows from Gromov–Prasad–Kojima theorem. In this case, the normalised Euclidean volume can be considered as a topological invariant of the knot type of  $K$  in  $M$ .

The number-theoretic nature of hyperbolic volume is usually highly intricate (see, e.g., [12]). The main result of our work with A. Kolpakov and A. Mednykh [1] is that the normalised Euclidean volume is an algebraic number. In many cases we give a method to compute its minimal polynomial.

**Funding:** *The work was supported by the state contract of Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0005).*

## REFERENCES

1. N. Abrosimov, A. Kolpakov, A. Mednykh, *Euclidean volumes of hyperbolic knots* // Proceedings of AMS (in press), DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/16353>
2. D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, P. B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds* // Invent. Math. 118 (1), 47–84 (1994).
3. A. Champanerkar, *A-polynomial and Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds*. PhD Thesis, Columbia University (2003).
4. M. Boileau, B. Leeb, J. Porti, *Geometrization of 3-dimensional orbifolds* // Ann. Math. 162 (1), 195–250 (2005)
5. M. Boileau, J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type* // Astérisque 272 (2001), 214 pp. (with an appendix by M. Heusener and J. Porti).
6. J. Porti, *Regenerating hyperbolic and spherical cone structures from Euclidean ones* // Topology 37 (2), 365–392 (1998).
7. S. Kojima, *Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds* // J. Diff. Geom. 49 (3), 469–516 (1998).
8. J. Porti, H. Weiß, *Deforming Euclidean cone 3-manifolds* // Geometry & Topology 11 (3), 1507–1538 (2007).
9. C. D. Hodgson, S. P. Kerckhoff, *Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery* // J. Diff. Geom. 48 (1), 1–59 (1998).



10. H. Weiß, *Local rigidity of 3-dimensional cone-manifolds* // J. Differential Geom. 71 (3), 437–506 (2005)
11. H. Weiß, *Global rigidity of 3-dimensional cone-manifolds* // J. Differential Geom. 76 (3), 495–523 (2007).
12. D. Zagier, *The Dilogarithm Function*, in: P. Cartier, P. Moussa, B. Julia, P. Vanhove (eds.), *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II*. Springer–Verlag, Berlin (2007).

УДК 512.772

## **О ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЯХ ПАРЫ М-КОНИК И М-КУБИКИ**

В.А. Горская

НИУ «Высшая школа экономики»

Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12, 603155

E-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача изотопической классификации плоских вещественных алгебраических кривых степени 7, распадающихся на две неособые кривые степени 2 (коник) и неособую кривую степени 3 (кубик) при условиях максимальности и общего положения. **Ключевые слова:** плоская вещественная распадающаяся алгебраическая кривая, изотопическая классификация

## **ON THE MUTUAL ARRANGEMENTS OF A PAIR OF M-CONICS AND M-CUBIC**

V.A. Gorskaya

**Abstract.** The problem of isotopic classification of plane real algebraic curves of degree 7 decomposing into a cubic and a pair of conics under maximality and general position conditions is considered.

**Keywords:** plane real decomposable algebraic curve, isotopic classification.

Задача о топологии плоских вещественных алгебраических кривых была включена Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы. К этой тематике естественным образом примыкает задача о топологии распадающихся кривых, систематическое изучение которой началось с классификации распадающихся кривых степени 6 в [1]. Достаточно длинный список работ по этой тематике разных авторов приведен в списке литературы в [2]. В настоящей работе продолжается исследование вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых степени 2 и неособой кривой степени 3, начатое в работах [3–4].

Итак, задача состоит в изотопической классификации расположений в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  кривых вида

$\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_3^1$  при следующих условиях максимальности и общего положения:

- (i)  $C_2, \tilde{C}_2$  и  $C_3$  являются  $M$ -кривыми<sup>2</sup>;
- (ii) каждые две из указанных в (i) кривых пересекаются без касания в максимально возможном (по теореме Безу) числе вещественных точек:  $\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6$ ,  $\#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$ ;
- (iii)  $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \emptyset$ , т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;
- (iv) все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;

К этим предположениям добавляется условие комбинаторного характера

- (v) все шесть общих точек нечётной ветви кубики с одной из коник  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне второй коники; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах<sup>3</sup>.

Результат проведённого исследования – следующая

**Теорема.** Расположения кривых вида  $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_3$  удовлетворяющие условиям (i) – (v), отличные от показанных на рис. 1 и 2, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих двадцати двух расположений десять (рис. 1<sup>4</sup>) реализованы распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости двенадцати оставшихся<sup>5</sup> открыт.

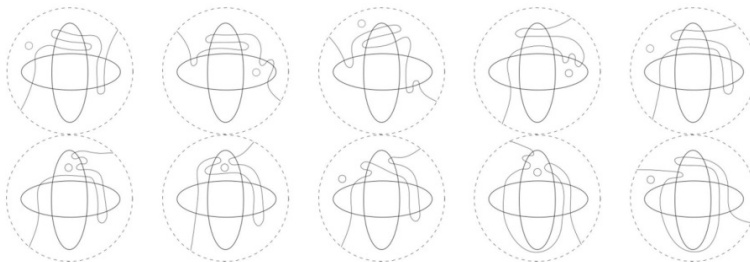
<sup>1</sup> Здесь и ниже используются общепринятые в теории плоских алгебраических кривых понятия и обозначения. Так, через  $\mathbb{R}C_m$  обозначается множество вещественных точек вещественной алгебраической кривой  $C_m$  степени  $m$ , а само это множество, рассматриваемое с точностью до изотопии в  $\mathbb{R}P^2$ , называется вещественной схемой кривой  $C_m$ .

<sup>2</sup> Т. е. вещественная схема каждой из кривых  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  представляет собой овал (окружность, вложенную в  $\mathbb{R}P^2$  двусторонне), а вещественная схема кривой  $C_3$  состоит из двух компонент связности, одна из которых – овал, а вторая – нечётная ветвь (окружность, вложенная в  $\mathbb{R}P^2$  односторонне).

<sup>3</sup> В [3], [4] рассматривались другие условия комбинаторного характера.

<sup>4</sup> Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

<sup>5</sup> Рисунки данных расположений здесь не приводятся ввиду недостатка места.



*Рис.1. Реализованные схемы*

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Полотовский Г. М. Каталог  $M$ -распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. 236, № 3. – С. 548-551.
2. Борисов И.М., Полотовский Г.М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2020. – Т. 176. – С. 3-18.
3. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. – 2020. – Т. 22. № 1. – С. 24-37.
4. Горская В.А., О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. – 2022. –Т. 23. № 3. – С. 61-76.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ ДВУХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 4

Н.Д. Пучкова

Нижегородский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, 20, 101000

E-mail: nataha1910@mail.ru

***Аннотация.** Рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости двух  $M$ -кривых степени 4. На изучаемые расположения наложены условие максимальности (овал одной из этих кривых имеет 16 попарно различных общих точек с овалом другой из них) и условие комбинаторного характера, выделяющее специальный тип таких расположений. Перечислены попарно различные топологические модели расположений этого типа, удовлетворяющие известным фактам о топологии неособых кривых и топологическим следствиям теоремы Безу. Таких моделей оказалось 700. Доказано, что 693 модели не могут быть реализованы кривыми степени 8, остальные 7 моделей удалось построить. Доказательства нереализуемости проводятся методом Оревкова, основанным на применении теории кос и зацеплений.*

***Ключевые слова.** Плоские вещественные алгебраические кривые, распадающиеся кривые, метод Оревкова.*

**Введение.** Данная работа посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  двух  $M$ -кривых степени 4, находящихся в общем положении, и является продолжением исследований [1], [2].

**Постановка задачи.** Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта [3]. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

В данной работе исследуется взаимное расположение в вещественной проективной плоскости двух кривых степени 4 такое, что: 1) эти две кривые являются  $M$ -кривыми; 2) все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кри-

вой; 3) точек пересечения максимальное число, т. е.  $4 \cdot 4 = 16$ ; 4) точки пересечения попарно различны.

Пусть овал  $O$  целиком лежит в аффинной. Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал  $O$  в восьми попарно различных точках. При достаточно малом  $\varepsilon$  граница  $\varepsilon$ -окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал  $O$  в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Пусть в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  имеем пересечение двух овалов типа «змея, обвивающаяся вокруг овала» такое, что один ( $a$ , значит, и второй) конец образующей дуги лежит в овале  $O$ . Отвечающую такой дуге змею назовём «змеёй с концом внутри овала».

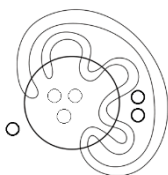
В данной работе будем исследовать «змеи с концом внутри овала». Поскольку моделей кривых, подлежащих исследованию, очень много, выделим подкласс, содержащий 700 попарно различных топологических моделей, удовлетворяющих известным фактам о топологии особых кривых и топологическим следствиям теоремы Безу.

Цель нашего исследования – найти изотопическую классификацию проективных кривых степени 8, удовлетворяющих условиям 1–4, имеющих пересечение овалов имеет тип «змея с концом внутри овала» и принадлежащее выделенному подклассу.

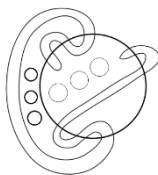
**Результаты.** Существуют только 7 изотопических типов кривых степени 8 типа «змея с концом внутри овала», принадлежащих выделенному подклассу, показанные на рис. 1–7.

Запреты доказываются с помощью теоремы Безу и метода Орекова [4], основанного на теории кос и зацеплений. Построения осуществлены методом малого параметра.

**Заключение.** Получена полная классификация кривых степени 8 рассматриваемого класса.



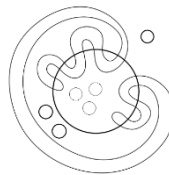
*Рис. 1*



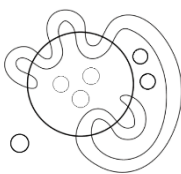
*Рис. 2*



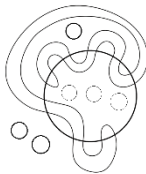
*Рис. 3*



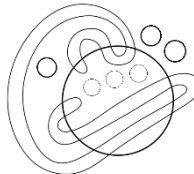
*Рис. 4*



*Рис. 5*



*Рис. 6*



*Рис. 7*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пучкова Н.Д. О взаимных расположениях двух  $M$ -кривых степени 4 // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2023. – Т. 222. – С. 69–82.
2. Пучкова Н.Д. О расположениях двух  $M$ -кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой // Чебышевский сборник. – 2023. – Т. 24, № 2(88), в печати.
3. Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова – М.: Наука, 1969. – 240 с.
4. Orevkov, S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. – 1999. – Vol. 38, No. 4. – P. 779-810.

## ON A CLASS OF MUTUAL ARRANGEMENTS OF TWO CURVES OF DEGREE 4

N.D. Puchkova

Nizhny Novgorod Branch of the National Research University Higher  
School of Economics,  
Russia, Moscow, Myasnitskaya str., 20, 101000

E-mail: nataha1910@mail.ru

**Abstract.** We consider the problem of topological classification of mutual dispositions in the real projective plane of two  $M$ -curves of degree 4. We study arrangements which are subject to the maximality condition (the oval of one of these curves has 16 pairwise different common points with the oval of the other of them) and some combinatorial condition to select a special type of such arrangements. Pairwise different topological models of arrangements of this type are listed, which satisfy the known facts about the topology of nonsingular curves and the topological consequences of Bezout's theorem. There are 700 such models. It is proved that 693 models cannot be realized by curves of degree 8, the remaining 7 models were built. Proofs of non-realizability are carried out by Orevkov's method based on the theory of braids and links.

**Introduction.** This paper is devoted to the study of mutual arrangements in the real projective plane  $\mathbb{R}P^2$  of two  $M$ -curves of degree 4 in general position and is a continuation of studies [1], [2].

The problem of topological classification of non-singular plane real algebraic curves is formulated in the first part of Hilbert's 16th problem [3]. At present, the classification of non-singular curves up to the seventh degree inclusive is known.

In this paper, we study the mutual arrangement of two curves of degree 4 in the real projective plane under certain conditions of maximality and general position. Namely, it is assumed that

1. These two curves are  $M$ -curves.
2. All points of intersection of these curves lie on one oval of one curve and on one oval of another curve.
3. Intersection points are the maximum number, i.e.  $4 \cdot 4 = 16$ .
4. The points of intersection are pairwise distinct.

Let the oval  $O$  lie entirely in the affine plane (we can always achieve this for an oval of an  $M$ -curve of degree 4, choosing as one of the coordinate axes in the projective plane a slightly shifted double tangent to this curve). Consider an unclosed arc without self-intersections, which also lies entirely in the affine plane and intersects the oval  $O$  at eight distinguished points. Let's call this arc *the generating arc*. For a sufficiently small  $\varepsilon$ , the boundary of the  $\varepsilon$ -neighborhood of this arc is another oval that intersects the original oval  $O$  at 16 distinguished points. We call this second oval *the snake*, and such a mutual arrangement of two ovals the intersection of branches "the snake coiling around the oval" type.

Let in the real projective plane  $\mathbb{R}P^2$  we have an intersection of two ovals of the type "a snake wrapped around an oval" such that one (and, therefore,



the second) end of the generating arc lies in the oval  $O$ . We call the snake corresponding to such an arc a "snake with an end inside the oval".

In this paper, we will investigate "snakes with an end inside the oval".

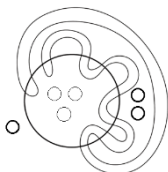
Since there are a lot of models of curves to be investigated, we single out a subclass containing 700 pairwise different topological models that satisfy the known facts about the topology of non-singular curves and the topological consequences of Bezout's theorem.

The aim of our study is to find an isotopy classification of projective curves of degree 8 satisfying conditions 1–4, having an intersection of ovals of the "snake with an end inside the oval" type and belonging to a distinguished subclass.

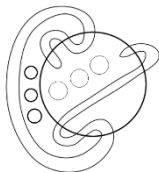
**Research methods.** The prohibitions are proved using Bezout's theorem and Orevkov's method [4], based on the theory of braids and links. The constructions were carried out by the small parameter method.

**Results.** There are only 7 isotopic types of curves of degree 8 of the "snake with an end inside the oval" type, belonging to the selected subclass, shown in Fig. 1–7.

**Conclusion.** A complete classification of curves of degree 8 of the class under consideration is obtained.



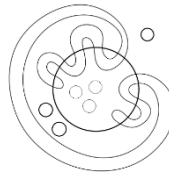
*Puc. 1*



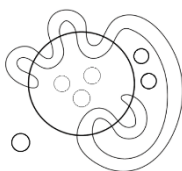
*Puc. 2*



*Puc. 3*



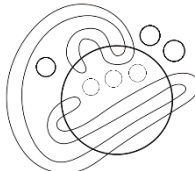
*Puc. 4*



*Puc. 5*



*Puc. 6*



*Puc. 7*

## REFERENCES

1. Puchkova N.D. (2023) ``On mutual arrangements of two M-curves of degree 4``, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, vol. 222. pp. 69–82.
2. Puchkova N.D. (2023) On the positions of two M-curves of degree 4, the oval of one of which wraps around the oval of the other. *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 2(88), in printing.
3. Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова – М.: Наука, 1969. – 240 с.
4. Orevkov, S.Yu. (1999) Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // *Topology*. – 1999. – Vol. 38, No. 4. – P. 779-810.

УДК 515.122.4

## **ROELCKE-ПРЕДКОМПАКТНОСТЬ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ “СЛОЖНЫХ” ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ**

Б.В. Сорин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет  
Россия, Москва

E-mail: bvs@imtprofi.ru

***Аннотация.** Исследуется Roelcke-предкомпактность групп автоморфизмов однородных лексикографически упорядоченных произведений линейно упорядоченных множеств. Приведены критерии Roelcke-предкомпактности группы автоморфизмов таких множеств.*

***Ключевые слова.** Roelcke-предкомпактность, лексикографически упорядоченное произведение множеств, группа автоморфизмов, 2-однородное множество, 0-примитивная группа, 0-2-транзитивная группа, жесткое множество, однозначно транзитивная группа.*

**Введение.** В докладе представлены некоторые результаты исследований Roelcke-предкомпактности групп автоморфизмов однородных лексикографически упорядоченных произведений линейно упорядоченных множеств. Это свойство групп существенно зависит от свойств множеств-сомножителей и, соответственно, Roelcke-предкомпактности групп их автоморфизмов и заданных на группах топологий. Найдены критерии Roelcke-предкомпактности группы автоморфизмов однородных лексикографически упорядоченных произведений. Установлена эквивалентность Roelcke-предкомпактности группы автоморфизмов лексикографически упорядоченного произведения и Roelcke-предкомпактности групп обоих его сомножителей. Установлено, что группы автоморфизмов однородного лексикографически упорядоченного произведения не Roelcke-предкомпактна, если хотя бы один из сомножителей является жестким множеством. Установлена Roelcke-предкомпактность лексикографически упорядоченного квадрата в топологии поточечной сходимости.

Приняты следующие обозначения:  $Aut(X)$  — группа автоморфизмов множества  $X$ ,  $\odot$  — операция лексикографического умножения,  $\diamond$  — конкатенация линейно упорядоченных множеств,  $\tau_\partial$  — перестано-

вочная топология,  $\tau_p$  — топология поточечной сходимости,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{R}$  — множества целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел соответственно.

В исследовании использованы некоторые основные свойства Roelcke-предкомпактности из [1].

**Лемма 1.** (1) Всюду плотная подгруппа Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна.

(2) Открытая подгруппа Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна.

(3) Непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна.

(4) Если нормальная подгруппа  $H$  и факторгруппа  $G/H$  группы  $G$  Roelcke-предкомпактны, то группа  $G$  Roelcke-предкомпактна.

(5) Предел обратного спектра из Roelcke-предкомпактных групп и гомоморфизмов Roelcke-предкомпактен.

(6) Произведение топологических групп Roelcke-предкомпактно в том и только в том случае, если сомножители — Roelcke-предкомпактные группы.

**Определения.** (1) Лексикографическое произведение линейно упорядоченных множеств — это декартово произведение сомножителей, на котором задан линейный лексикографический порядок.

(2) Промежуток  $J$  однородного линейно упорядоченного множества  $X$  называется *регулярным* [2, Определение 5], если для всех  $x, y \in J$ , для всех  $g \in \text{Aut}(X)$ ,  $gx \in J \Rightarrow gy \in J$ .

(3) Однородное линейно упорядоченное множество  $X$  называется *простым* [2, Определение 6], если в  $X$  нет собственных регулярных промежутков (несобственные — или точки, или все  $X$ ). Группа  $\text{Aut } X$  в этом случае называется *о-примитивной* [3].

(4) Линейно упорядоченное множество  $X$  называется *2-однородным*, если для любых пар точек  $x < y$  и  $x' < y'$  существует  $g \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $g(x) = x'$ ,  $g(y) = y'$ . Группа  $\text{Aut}(X)$  в этом случае называется *о-2-транзитивной* [3]. 2-однородное линейно упорядоченное множество плотное.

(5) Однородное линейно упорядоченное множество  $X$  называется *жестким (rigid)* [4], если для всех  $x, y \in X$  существует единственный  $g \in \text{Aut}(X)$  такой, что  $g(x) = y$ . Группа  $\text{Aut}(X)$  в этом случае называется *регулярной* или *однозначно транзитивной* [3].

Регулярный промежуток  $J$  — однородное линейно упорядоченное множество и группа  $\text{Aut}(J)$  (любой автоморфизм  $J$  продолжается до

автоморфизма  $X$ , совпадающего с тождественным отображением на  $X \setminus J$ ) называется *характеристической группой*  $J$ .

**Следствие 2.** Пусть  $J$  — регулярный промежуток однородного линейно упорядоченного множества  $X$  и  $(Aut(X), \tau_p)$  (соответственно  $(Aut(X), \tau_\partial)$ ) Roelcke-предкомпактна, тогда группа  $(Aut(J), \tau_p)$  (соответственно  $(Aut(J), \tau_\partial)$ ) Roelcke-предкомпактна.

Автоморфизмы  $X$  отображают регулярные интервалы на регулярные интервалы [2, п. (4.3)]. Если  $J$  регулярный промежуток однородного линейно упорядоченного множества  $X$ , то фактормножество  $X/J$  является однородным линейно упорядоченным множеством [2, п. (4.3), Теорема 7]. Поэтому теорему о группе автоморфизмов лексикографически упорядоченного произведения [6, Теорема 8] переформулируем следующим образом.

**Теорема 3** [6]. Пусть  $J$  регулярный промежуток однородного линейно упорядоченного множества  $X$ . Тогда

- (1)  $Aut(X) \cong Aut(J)^{X/J} \ltimes Aut(X/J)$ .
- (2)  $(Aut(X), \tau_p) \cong (Aut(J), \tau_p)^{X/J} \ltimes (Aut(X/J), \tau_\partial)$ .
- (3)  $(Aut(X), \tau_\partial) \cong (Aut(J), \tau_\partial)^{X/J} \ltimes (Aut(X/J), \tau_\partial)$ .
- (4)  $(Aut(X), \tau_p) / (Aut(J), \tau_p)^{X/J} = (Aut(X), \tau_\partial) / (Aut(J), \tau_\partial)^{X/J} = (Aut(J), \tau_\partial)$

Из Леммы 1, Следствия 2 и Теоремы 3 имеем

**Теорема 4.** Пусть  $X$  однородное линейно упорядоченное множество, не являющееся простым. Следующие условия эквивалентны:

- (1) топологическая группа  $(Aut(X), \tau_p)$  (также  $(Aut(X), \tau_\partial)$ ) Roelcke-предкомпактна;
- (2) для любого регулярного промежутка  $J$  топологические группы  $(Aut(J), \tau_p)$  (также  $(Aut(X), \tau_\partial)$ ) и  $(Aut(X/J), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактны;
- (3) существует регулярный промежуток  $J$  такой, что топологические группы  $(Aut(J), \tau_p)$  (также  $(Aut(X), \tau_\partial)$ ) и  $(Aut(X/J), \tau_\partial)$  Roelcke-предкомпактны.

**Пример.** (1) Группа автоморфизмов лексикографически упорядоченного произведения двух множеств с 2-однородными сомножителями Roelcke-предкомпактна в топологии  $\tau_p$ .

В частности, группы автоморфизмов множеств вида  $X_1 \odot X_2$ , где  $X_1, X_2 \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{R}, L, \tilde{L}\}$ , Roelcke-предкомпактны в топологии  $\tau_p$ , где:  $\mathcal{L} = [0, \omega_1) \odot [0, 1)$  — длинный луч,  $\mathcal{L}_-$  — длинный луч  $\mathcal{L}$  с обратным линейным упорядочением,  $L = \mathcal{L} \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $L_- = \mathcal{L}_- \setminus \{(0, 0)\}$  и  $\tilde{L} = L_- \diamond \{0\} \diamond L$ .

Группа автоморфизмов лексикографически упорядоченного квадрата [6, Следствие 5] Roelcke-предкомпактна в топологии  $\tau_p$ .

(2) Группы автоморфизмов лексикографически упорядоченных произведений двух множеств, одно из которых жесткое линейно упорядоченное множество, могут быть Roelcke-предкомпактны в топологии  $\tau_p$ , а значит, и в топологии  $\tau_\partial: \mathbb{Z} \odot \mathbb{Q}$  (изоморфное  $\mathbb{Q}$ ) и  $\mathbb{Z} \odot \mathbb{P}$  (изоморфное  $\mathbb{P}$ ), а могут быть не Roelcke-предкомпактны в топологии  $\tau_p$ , а значит, и в топологии  $\tau_\partial: \mathbb{Z} \odot \mathbb{R}, \mathbb{Z} \odot \mathbb{Z}$ .

Группа автоморфизмов однородного дискретного множества [5, Определение 4] не Roelcke-предкомпактна в топологиях  $\tau_p$  и  $\tau_\partial$ .

**Теорема 5.** Пусть в однородном линейно упорядоченном множестве  $X$ , не являющемся простым, нет простых собственных регулярных промежутков. Тогда  $(Aut(X), \tau_p)$  Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группы автоморфизмов  $(Aut(X/J), \tau_\partial)$  фактормножеств  $X/J$  Roelcke-предкомпактны, где  $J$  — регулярные промежутки.

### **Вопросы**

(1) Являются ли Roelcke-предкомпактными группы  $(Aut(X), \tau_\partial)$ , где  $X$  — однородное лексикографически упорядоченное произведение линейно упорядоченных множеств?

(2) Эквивалентны ли Roelcke-предкомпактность группы  $(Aut(X), \tau_\partial)$  и Roelcke-предкомпактность группы  $(Aut(X), \tau_p)$ , где  $X$  — однородное лексикографически упорядоченное произведение линейно упорядоченных множеств?

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Tsankov T., Unitary representations of oligomorphic groups // *Geometric and Functional Analysis*, 22(2) (2012), 528-555.
2. Ohkuma T., Structure of homogeneous chains // *Kodai Math. Sem. Rep.*, 5(1) (1953), 1-12.
3. Glass A.M.W., Ordered permutations groups // *London Math. Soc. Lecture Note, Ser. 55*, Cambridge University Press, Cambridge 1981.
4. Glass A.M.W., Gurevich Yu, Holland W.C., Shelah S., Rigid homogeneous chains // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 89(7) (1981), 7-17.
5. Ohkuma T., On discrete homogeneous chains // *Kodai Math. Sem. Rep.*, 4(1) (1952), 23-30.
6. Сорин Б. В., Компактификации групп гомеоморфизмов линейно упорядоченных компактов // *Мат. Заметки*, 112:1 (2022), 118–137.

**Секция 4**  
**Вещественный, комплексный**  
**и функциональный анализ**

УДК: 517.54

## **СЕМЕЙСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ДВУУГОЛЬНИК С РАЗРЕЗОМ ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ К ГРАНИЦЕ**

М. Кармуши

Томский государственный университет  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
maherkarmoushi1996@gmail.com

***Аннотация.** Построено семейство конформных отображений верхней полуплоскости на двуугольник с разрезом. Записано дифференциальное уравнение Левнера для этого семейства.*

***Ключевые слова:** конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, уравнение Левнера.*

## **A FAMILY OF MAPPINGS FROM THE UPPER HALF-PLANE ONTO DIGON WITH A CUT AT ZERO ANGLE TO THE BOUNDARY**

M. Karmoushi

Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

***Abstract.** We construed a family of conformal mappings from the upper half-plane onto a digon with cut adjoining the boundary at zero angle. The Loewner differential equation for this family is written.*

***Keywords:** conformal mapping, Schwarz–Christoffel integral, Loewner equation.*

В последнее время изучается управляющая функция в уравнении Левнера, генерирующая разрез в односвязной области, выходящий под нулевым углом к границе [1–4]. В данной работе с помощью формулы Кристоффеля–Шварца строится семейство конформных отображений верхней полуплоскости на двуугольник с разрезом переменной длины, выходящими из вершины двуугольника под нулевым углом к одной из сторон двуугольника.



**Теорема.** Семейство отображений  $f = f(z, t)$ ,  $h \cot \alpha \pi < t < \infty$ , переводящее при фиксированном  $t$  верхнюю полуплоскость на многоугольник

$$\Delta(t) = \{w: 0 < \arg w < \alpha\pi\} \setminus \{w: \operatorname{Re} w > t, \operatorname{Im} w = h\},$$

можно записать в виде

$$f(z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha(t) - \lambda(t)}{\alpha(t) - b(t)} (a(t) - z)^{-\alpha} + \left( (a(t) - z)^{1-\alpha} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{b(t) - \lambda(t)}{a(t) - b(t)} \right),$$

где

$$F = {}_2F_1 \left( 1, 1 - \alpha; 2 - \alpha; \frac{a(t) - z}{a(t) - b(t)} \right),$$

и  $b(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $a(t)$  определяются по формулам

$$\lambda(t) = a(t) \left( 2 + \alpha - (ca(t))^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \right),$$

$$b(t) = a(t) \left( 1 - (ca(t))^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \right),$$

$$t = \frac{-c^\alpha}{1 - \alpha} (ca(t))^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \left( (\alpha + 1) (ca(t))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1 \right)^{1-\alpha} \left( (1 - \alpha) + \alpha(\alpha + 1) \left( ca(t)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right) F \right)$$

где  $c = \left( \frac{h}{\pi \alpha (\alpha + 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Семейство  $f$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Левнера

$$\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{z - \mu(\tau)} \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial z} = 0,$$

с начальным условием  $f(z) = \left( \frac{-1}{z} \right)^\alpha$  и управляющей функцией

$\mu(\tau) = \lambda(t(\tau))$  где

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha + 1)^{\alpha+2}}{\alpha} \int_0^t a^{2+\alpha}(x) \left( 1 - \frac{1}{\alpha + 1} (ca(t))^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}} \right)^{1+\alpha} dx.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lau K.-S., Wu H.-H. *On tangential slit solution of the Leowner equation* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2016. – №41. – pp. 681–691.
2. N. N. Nakipov, S. R. Nasirov *A parametric method of finding accessory parameters for the generalized Schwarz–Christoffel integrals* // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2016. – V. 158. – pp. 202–220.
3. I. A. Kolesnikov *On the problem of determining parameters in the Schwarz equation* // Issues Anal. – 2018. – V. 7(25). – pp. 50–62.
4. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. *Perturbation of the tangential slit by conformal maps* // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – V. 464. – №2. – pp. 1107–1118.

УДК 517.518.2

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, НЕ ИМЕЮЩИЕ КОНЕЧНОГО НОСИТЕЛЯ

В.Р. Лазарев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра математического анализа и теории функций  
механико-математического факультета  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: lazarev@math.tsu.ru

***Аннотация.** Введено понятие функционала с  $\sigma$ -конечным носителем. Показано, что образ первого координатного функционала при сопряжённом к гомеоморфизму Гулько – Хмылёвой отображении имеет  $\sigma$ -конечный носитель.*

***Ключевые слова.** Пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости, функционал с  $\sigma$ -конечным носителем.*

## CONTINUOUS FUNCTIONALS WITH NO FINITE SUPPORT

V.R. Lazarev

***Abstract.** The notion of the functional with a  $\sigma$ -finite support is introduced. It is shown that the image of the first coordinate functional under dual mapping of Gul'ko – Khmyleva's homeomorphism has a  $\sigma$ -finite support.*

***Keywords.** Space of continuous functions, pointwise convergence topology, functional with a  $\sigma$ -finite support*

Пусть  $X$  – множество,  $A \subset \mathbb{R}^X$ .

**Определение 1.** Функция  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  называется функционалом с конечным носителем  $K \subset X$ , если выполнены два условия:

(fs1) Для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\varphi \in A$  существует  $\delta > 0$  такое, что из  $\psi \in A$ ,  $|\psi(x) - \varphi(x)| < \delta$  для всех  $x \in K$  следует  $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$ ;

(fs2) Существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого  $x \in K$  и для любой окрестности  $U \subset X$  точки  $x$  существуют  $\varphi^x, \psi^x \in A$ , совпадающие вне  $U$ , для которых  $|f(\varphi^x) - f(\psi^x)| > \varepsilon$ .

**Определение 2.** Функция  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  называется функционалом с  $\sigma$ -конечным носителем  $K \subset X$ , если существуют представления  $A = \bigcup$

$\{A_n: n \in \mathbb{N}\}$ ,  $K = \cup \{K_n: n \in \mathbb{N}\}$ , где все множества  $K_n$  конечны, такие, что каждое сужение  $f: A_n \rightarrow \mathbb{R}$  – функционал с конечным носителем  $K_n$ .

Ниже рассматривается  $A = c_{00} \times c_{00}$ , которое всюду плотно в  $c_0 \times s \cong C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$  в топологии поточечной сходимости.

В [1] построен пример гомеоморфного отображения

$$U: C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}) \rightarrow C_p(\alpha\mathbb{N}),$$

чем доказано, что компактность не сохраняется отношением  $t$ -эквивалентности. Ниже мы предполагаем фиксированным некоторое разбиение множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел на непересекающиеся бесконечные подмножества (см. [1], теорема 1)  $N_1, N_2, \dots$ , и считаем, что  $1 \in N_1$ . В [2] установлено, что образ  $U^*(p_1)$  первого координатного функционала  $p_1$  при сопряжённом отображении  $U^*$  не имеет конечного носителя. То же самое справедливо и для всех функционалов  $U^*(p_{m(n)})$ , где  $m(n) = \min N_n$ . Тем не менее, эти функционалы имеют конечные носители. Установим это для функционала  $U^*(p_1)$ .

**Предложение 1.**  $U^*(p_1): c_{00} \times c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$  – функционал с  $\omega$ -конечным носителем  $K = \{1\} \oplus N_1$ .

Доказательство. Для упрощения обозначений заново перенумеруем элементы  $N_1$ :  $N_1 = \{1, 2, \dots\}$ . Положим  $K_n = \{1\} \oplus \{1, \dots, n\}$ ,  $E_n = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_{00}: x_k = 0 \text{ при } k > n\}$ ,  $A_n = E_n \times (E_n)^n$ . Тогда очевидно, что  $K = \{1\} \oplus N_1 = \cup \{K_n: n \in \mathbb{N}\}$ ,  $A = c_{00} \times c_{00} = \cup \{A_n: n \in \mathbb{N}\}$ . По определению 2, нужно показать, что  $U^*(p_1): A_n \rightarrow \mathbb{R}$  – функционал с конечным носителем  $K_n$ . Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $(x, y) \in A_n$ .

По формуле (3.6) из [2] и по определению сопряжённого отображения имеем

$$U^*(p_1)((x, y)) = p_1(U_1(x_1, y^1), \dots, U_k(x_k, y^k), \dots). \quad (2)$$

Так как  $1 \in N_1$ , то правая часть в (2) равна  $p_1(U_1(x_1, y^1))$ , то есть, равна первой координате последовательности  $U_1(x_1, y^1)$ . Из определения гомеоморфизма  $U_1$  (см. конструкцию  $u$  в [1], §2) и из включения  $y^1 \in E_n$ ,  $y^1 = (y_1^1, \dots, y_n^1, 0, \dots, 0, \dots)$ , следует, что

$$U_1(x_1, y^1) = u_{n+2} \circ \dots \circ u_1((u_0(x_1), y_1^1, \dots, y_n^1, 0, \dots, 0, \dots)).$$

Таким образом, координаты последовательности  $U_1(x_1, y^1)$  непрерывно зависят от  $x_1, y_1^1, \dots, y_n^1$ . Поэтому существует  $\delta > 0$  такое, что если  $(x', y') \in A_n$ ,  $|x_1 - x'_1| < \delta$ ,  $|y_i^1 - y'^1_i| < \delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $|p_1(U_1(x_1, y^1)) - p_1(U_1(x'_1, y'^1))| < \varepsilon$ . Значит, условие (fs1) выполнено.

Проверим (fs2). Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Для гомеоморфизма  $U_1$  имеем  $a = 1$ . Рассмотрим пару  $(x', y') \in A_n$ , где  $x'_1 = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ,  $y'^1 = 0$ , а также пару  $(x, y) \in A_n$ , где  $x_1 = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ,  $y^1 = \left(0, \dots, 0, -\frac{6}{4}, 0, \dots, 0\right)$  ( $-\frac{6}{4}$  на  $k$ -м месте). Остальные координаты компонент выбранных пар предполагаем нулевыми. Таким образом, выбранные элементы совпадают во всех точках  $K_n$ , кроме точки  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Руководствуясь §2 из [1], или разделом 3 из [2], можно проверить, что  $|p_1(U_1(x, y)) - p_1(U_1(x', y'))| = 34 - 64 = 34 > \varepsilon$ .

Случай  $k = 1$  (первое слагаемое в  $K_n$ ) очевиден. Достаточно за пару  $(x', y')$  взять нулевой элемент из  $A_n$ , а пару  $(x, y)$  выбрать так, чтобы  $x_1 = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ,  $y^1 = 0$ . Закljučаем, что (fs2) также выполнено. ■

По аналогии со статьёй [2] можно ввести понятие гомеоморфизма пространств непрерывных функций со свойством -конечного носителя. Из предложения 1 и результатов статей [1], [2] вытекают следующие факты.

**Следствие 1.** Гомеоморфизм Гулько – Хмылёвой имеет свойство -конечного носителя.

**Следствие 2.** Компактность не сохраняется гомеоморфизмами пространств функций, имеющими свойство -конечного носителя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гулько С.П., Хмылёва Т.Е. Компактность не сохраняется отношением  $t$ -эквивалентности // Математические заметки.– 1986.– Т. 39, № 6.– С. 895–903.
2. Аметова В.С., Лазарев В.Р. О свойстве конечного носителя гомеоморфизма Гулько – Хмылёвой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.– 2022.– № 80.– С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/80/1

УДК 517.9

## **О БИСУБДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ**

Р.Г. Джафаров<sup>1,2,а)</sup>, М.А. Садыгов<sup>3,4,б)</sup>

<sup>1</sup> Институт физических проблем, Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, AZ1148 Баку, Азербайджан

<sup>2</sup> Бакинский государственный университет, кафедра теоретической физики, физический факультет, ул. З. Халилова, 23, AZ1148 Баку, Азербайджан

<sup>3</sup> Бакинский государственный университет, кафедра математических методов теории управления, механико-математический факультет, ул. З. Халилова, 23, AZ1148 Баку, Азербайджан

<sup>4</sup> Институт прикладной математики, Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, AZ1148 Баку, Азербайджан

E-mail: <sup>а)</sup> r.g.jafarov@gmail.com , <sup>б)</sup> misreddin08@rambler.ru

***Абстракт:** В докладе будут обсуждаться бисубдифференциал и бисопряженный оператор для бивыпуклых операторов и ряд их свойств.*

***Ключевые слова:** бивыпуклые операторы, бисопряженный оператор, бисубдифференциал.*

### **Введение**

При исследовании оптимальности высокого порядка для негладких задач минимизации возникает новое направление  $n$ -выпуклый анализ. В  $n$ -выпуклом анализе в основном изучаются  $n$ -выпуклое множество и  $n$ -выпуклая функция.

Известно, что в выпуклом анализе существенный роль играет теорема отделимости, субдифференциал и сопряженная функция. В  $n$ -выпуклым анализе основной роль играет теория тензорного произведения, бисубдифференциал и бисопряженная функция.

В работе рассмотрена бисубдифференцируемость бивыпуклого оператора и изучены ряд их свойств.

### **1. Алгебраический бисубдифференцируемость бивыпуклого оператора**

Пусть  $E$  - некоторое упорядоченное векторное пространство, т.е. пространство с выделенным выступающим выпуклым конусом  $E^+$  -

конусом положительных элементов. Пусть  $E_{+\infty} = E \cup \{+\infty\}$ , причем порядок индуцированный в  $E$  из  $E_{+\infty}$  совпадает с исходным порядком в  $E$ .

Пространством Канторовича или, короче,  $K$ -пространством называют

векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет

точные границы.

Пусть  $X$  и  $Y$  вещественные векторные пространства. Отображение

$f: X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  называется бивыпуклой, если отображения  $f(\cdot, y): X \rightarrow E_{+\infty}$ ,  $f(x, \cdot): Y \rightarrow E_{+\infty}$  выпуклые при  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Обозначим через  $\tilde{B}(X \times Y, E)$  векторное пространство билинейных операторов из  $X \times Y$  в  $E$ .

Если  $P: X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  бисублинейный оператор, то положим

$$\partial_2^a P = \{x^* \in \tilde{B}(X \times Y, E) : P(x, y) \geq x^*(x, y), (x, y) \in X \times Y\}.$$

Если  $X$  и  $Y$  топологические векторные пространства, а  $E$  упорядоченное топо-логическое векторное пространство, то положим  $\partial_2 P = \partial_2^a P \cap B(X \times Y, E)$ , где  $B(X \times Y, E)$  пространство билинейных непрерывных операторов из  $X \times Y$  в  $E$ .

Отметим, что если  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $P$  отдельно непрерывный бисублинейный функционал, то  $\partial_2^a P = \partial_2 P$ .

Пусть  $f: X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  отображение и

$$\text{dom} f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) < +\infty\}.$$

Бисубдифференциалом оператора  $f$  в точке  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{dom} f$  назовем (см.[1]) следующее множество

$$\partial_2^a f(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in \tilde{B}(X \times Y, E) : f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}), (x, y) \in X \times Y\}.$$

**Лемма 1.** Если  $P: X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  бисублинейный оператор,  $P(0, 0) = 0$  и  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{dom} P$ , то

$$\partial_2^a P(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in \tilde{B}(X \times Y, E) : x^* \in \partial_2^a P, P(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

**Лемма 2.** Если  $x^* \in \partial_2^a f(\bar{x}, \bar{y})$ , то

$$f(\bar{x} + x, \bar{y} + y) - 2f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x} - x, \bar{y} - y) \geq 2x^*(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Для простоты далее будем считать, что  $E$   $K$ -пространство.

Пусть  $x^* \in \tilde{B}(X \times Y, E)$  и  $f : X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$ . Положим (см. [1])

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{x^*(x, y) - f(x, y)\},$$

$$f^{**}(x, y) = \sup_{x^* \in \tilde{B}(X \times Y, E)} \{x^*(x, y) - f^*(x^*)\}.$$

**Лемма 3.** Если  $f$  бивыпуклый оператор, то  $x^* \in \partial_2^a f(\bar{x}, \bar{y})$  тогда и только тогда, когда  $f^*(x^*) + f(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Лемма 4.** Если  $f(x, y) = \sup_{x^* \in \partial_2^a f} x^*(x, y)$ ,

$$\text{то } f^{**}(x, y) = f(x, y) \text{ при } (x, y) \in X \times Y.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\text{dom} f$  бивыпуклое множество и  $\partial_2^a f(x, y) \neq \emptyset$  для любого  $(x, y) \in \text{dom} f$ . Тогда  $f : X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  бивыпуклый оператор.

Если  $P_1 : X \times Y \rightarrow E$  и  $P_2 : X \times Y \rightarrow E$ , то  $\partial_2^a(P_1 + P_2) \supset \partial_2^a P_1 + \partial_2^a P_2$ .

## 2. Бисубдифференциал бивыпуклого оператора

Пусть  $X$  и  $Y$  нормированные пространства,  $E$  нормированное  $K$ -пространство. Кроме того далее считаем, что  $E^+$  замкнутый выпуклый выступающий конус. Через  $B(X \times Y, E)$  обозначим векторное пространство всех непрерывных билинейных операторов из  $X \times Y$  в  $E$ .

Пусть  $f : X \times Y \rightarrow E_{+\infty}$  и  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{dom} f$ . Положим

$$\partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in B(X \times Y, E) : f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y) - x^*(\bar{x}, \bar{y}), \quad (x, y) \in X \times Y\},$$

$$\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y}) = \{x^* \in B(X \times Y, E) : f(\bar{x} + x, \bar{y} + y) - 2f(\bar{x}, \bar{y}) +$$

$$+ f(\bar{x} - x, \bar{y} - y) \geq 2x^*(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y\}.$$

Из определения непосредственно следует, что

$$\partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) \subset \partial^2 f(\bar{x}, \bar{y}).$$



**Лемма 4.** Если  $P$  бисублинейный оператор, то  $\partial_2 P \subset \partial^2 P(0,0)$ .

Кроме того, если  $P(-x, -y) = P(x, y)$ , то  $\partial_2 P = \partial^2 P(0,0)$ .

**Лемма 5.** Если  $P$  бисублинейный оператор, то

$$\partial^2 P(\bar{x}, \bar{y}) \supset \{x^* \in B(X \times Y, E) : x^* \in \partial_2 P, P(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})\}$$

и из  $x^* \in \partial^2 P(\bar{x}, \bar{y})$  следует, что  $P(\bar{x}, \bar{y}) = x^*(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Лемма 6.** Если  $P$  бисублинейный оператор, то

$$\begin{aligned} \partial^2 P(\bar{x}, \bar{y}) &= \{x^* \in B(X \times Y, E) : P(\bar{x} + x, \bar{y} + y) + P(\bar{x} - x, \bar{y} - y) \geq \\ &\geq 2x^*(x, y) + 2x^*(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } (x, y) \in X \times Y\}. \end{aligned}$$

**Лемма 7.** Если  $P$  бисублинейный оператор и  $x^* \in \partial^2 P(\bar{x}, \bar{y})$ , то

$$P(x, \bar{y}) \geq x^*(x, \bar{y}), \quad P(\bar{x}, v) \geq x^*(\bar{x}, v) \text{ при } x \in X, v \in Y.$$

**Лемма 8.** Если  $P$  бисублинейный оператор и  $x^* \in B(X \times Y, E)$ , то неравенство

$P(\bar{x} + x, \bar{y} + y) - P(\bar{x} + x, \bar{y}) - P(\bar{x}, \bar{y} + y) + P(\bar{x}, \bar{y}) \geq x^*(x, y)$  при  $(x, y) \in X \times Y$  выполняется в том и только в том случае, когда

$$x^* \in \partial_2 P, \quad P(z, \bar{y}) = x^*(z, \bar{y}) \text{ и } P(\bar{x}, v) = x^*(\bar{x}, v).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций. – Баку: Элм, 2007. – 224 с.

UDC 517. 984

## **TWO-MAGNON SYSTEMS IN THE FOUR-SPIN EXCHANGE HAMILTONIAN**

S.M. Tashpulatov

Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

**Abstract.** We consider the operator energy of two-magnon system with the four-spin exchange Hamiltonian and investigated the spectrum of the system. We proof the spectra of the system is the purely discrete and consists of no more than six eigenvalues.

**Keywords:** Four-spin exchange Hamiltonian, two-magnon systems, spectra, discrete spectra, continuous spectrum.

## **ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ЧЕТЫРЕХ СПИНОВЫХ ОБМЕННЫХ ГАМИЛЬТОНИАНАХ**

С.М. Ташпулатов

Институт ядерной физики Академии наук республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается оператор энергии двух магнонных систем с четырех спиновым обменным гамильтонианом и исследуется спектр системы. Показываем что, спектр системы чисто дискретен и состоит из не более шести собственных значений.

**Ключевые слово:** Четырех спиновым обменный гамильтониан, двух магنونная система, спектр, дискрет спектр, непрерывный спектр.

**Introduction.** In theoretical investigations of magnetically ordered systems and in the interpretation of experimental data, the starting point was usually the Heisenberg exchange Hamiltonian (for arbitrary spin  $s$ ),

$$H_1 = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}), \quad (1)$$

where  $J$  is the parameter of the bilinear exchange interaction between the nearest-neighbor atoms,  $\vec{S}_m$  is the atomic spin operator for the spin  $s$  at the  $m$ th lattice site in the  $\nu$ -dimensional lattice  $Z^\nu$ , and the summation over  $\tau$  ranges the nearest neighbors.

For an arbitrary spin  $s$ , the isotropic spin exchange Hamiltonian in fact has the form [1]

$$H = \sum_{m,\tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})^n, \quad (2)$$

where  $J_n$  are the parameters of the multipole exchange interactions between the nearest-neighbor atoms. Hamiltonian (2) coincides with (1) only for  $s = 1/2$ , whereas if  $s > 1/2$ , then some terms containing higher degrees of  $(\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})$  appear, which must be taken into consideration in studying magnets with spins  $s > 1/2$ . Expression (2) is called a non-Heisenberg Hamiltonian.

In crystals, it is also necessary to take into account that in addition to the two-spin exchange, there is also a multi-spin exchange. In the general case, the isotropic exchange Hamiltonian has the form

$$H = -\sum_n \sum_{\langle f \rangle} I_n (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n) (\vec{S}_{f_1} \vec{S}_{f_2}) \dots (\vec{S}_{f_{2n-1}} \vec{S}_{f_{2n}}). \quad (3)$$

For the first time, attention was drawn to the existence of multi-spin exchange in [2] when analyzing the quasi-polar model of metal, although, in fact, the considerations given there were based only on the properties of the symmetry of the exchange interaction. Here we consider two-magnon system with four-exchange Hamiltonian.

Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) (\vec{S}_{m+2\tau} \vec{S}_{m+3\tau}), \quad (4)$$

where  $J < 0$  parameter,  $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$  is the atom spin operator in the site  $m \in Z^\nu$ ,  $\tau = \pm e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu$ , here  $e_j$  are unit mutually orthogonal vectors. Hamiltonian (4) acts in the symmetric Fock space  $\mathcal{H}_{symm}$ . We let  $\varphi_0$  denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions  $S_m^+ \varphi_0 = 0$ , and  $S_m^z \varphi_0 = s \varphi_0$ , where  $||\varphi_0|| = 1$ . We set  $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$ , where  $S_m^+$  and  $S_m^-$  are the magnon creation and annihilation operators at the site  $m$ . The vectors  $S_m^- S_n^- \varphi_0$  describes the state of the system of two magnons at the sites  $m$  and  $n$  with spin  $s$ . The vector space spanned by them denoted by  $\mathcal{H}_2$ . It is a Euclidian space under the given inner product. We let  $\mathcal{H}_2$  denote the closure of this space, called the space of two-magnon

states of the operator  $H$ . We denote the restriction of  $H$  to the space  $\mathcal{H}_2$  by  $H_2$ .

**Theorem 1.** The space  $\mathcal{H}_2$  is invariant under the operator  $H$ . The operator  $H_2$  is a bounded self-adjoint operator; it generates a bounded self-adjoint operator  $\bar{H}_2$  acting in the space  $l_2((Z^v)^2)$  as  $(\bar{H}_2 f)(p, q) = J \sum_{p, q, \tau} \{ [2s^2 \delta_{p, q+2\tau} + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} + s^2 \delta_{p, q+\tau} + s^2 \delta_{p+\tau, q} + s^2 \delta_{p+3\tau, q} + s^2 \delta_{p, q+3\tau}] f(p, q) + (-s^2 \delta_{p+3\tau, q} - 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} - s^2 \delta_{p+\tau, q}) \times f(p - \tau, q) + (-s^2 \delta_{p, q+3\tau} - 2s^2 \delta_{p, q+2\tau} - s^2 \delta_{p, q+\tau}) f(p, q - \tau) + (-s^2 \delta_{p+3\tau, q} - 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} - s^2 \delta_{p+\tau, q}) f(p + \tau, q) + (-s^2 \delta_{p, q+3\tau} - 2s^2 \delta_{p, q+2\tau} - s^2 \delta_{p, q+\tau}) f(p, q + \tau) + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} f(p - \tau, q - \tau) + (s^2 \delta_{p+3\tau, q} + s^2 \delta_{p+\tau, q}) f(p + \tau, q - \tau) + (s^2 \delta_{p, q+3\tau} + s^2 \delta_{p, q+\tau}) \times f(p - \tau, q + \tau) + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} f(p + \tau, q + \tau) \}$ ,

where  $\delta_{k, j}$  is the Kronecker symbol, and the  $\tau = \pm e_j$ . The operator  $H_2$  acts on the vector  $\psi \in \mathcal{H}_2$  by the formula  $H_2 \psi = \sum_{p, q} (\bar{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0$ .

Let  $\mathcal{F}: l_2((Z^v)^2) \rightarrow L_2((T^v)^2) \equiv \mathcal{H}_2$  be the Fourier transform, where  $T^v$  is the  $v$ -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure  $d\lambda$ , i.e.,  $\lambda(T^v) = 1$ . We set  $\tilde{H}_2 = \mathcal{F} \bar{H}_2 \mathcal{F}^{-1}$ .

**Theorem 2.** The Fourier transform of operator  $\bar{H}_2$  is an operator  $\tilde{H}_2 = \mathcal{F} \bar{H}_2 \mathcal{F}^{-1}$ , acting in the space  $L_2^{\text{symm}}((T^v)^2)$  be the formula

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_2 f)(\lambda, \mu) = & J \sum_{i=1}^v \int_{T^v} f(s, A - s) \{ 8s^2 \cos(A - 2s) \cos(A - 2\lambda) \\ & + 4s^2 \cos\left(\frac{3A}{2} - 3s\right) \cos\left(\frac{3A}{2} - 3\lambda\right) - 4s^2 \cos\left(\frac{A}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{3A}{2} - 3\lambda\right) - \\ & 4s^2 \cos s \cos(A - 2\lambda) - 4s^2 \cos(2A - 3s) \cos(A - 2\lambda) - 4s^2 \cos\left(\frac{3A}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{A}{2} - \lambda\right) - \\ & 4s^2 \cos(A - 3s) \cos(A - \lambda) + 4s^2 \cos 2s \cos\left(\frac{A}{2} - \lambda\right) + \\ & 4s^2 \cos\left(\frac{3A}{2} - 3s\right) \cos\left(\frac{A}{2} - \lambda\right) - 4s^2 \cos(A - s) \cos(A - 2\lambda) - 4s^2 \cos\left(\frac{3A}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{3A}{2} - 3\lambda\right) + \\ & 4s^2 \cos(A - 2\lambda - s) \cos(A - 2\lambda) + 4s^2 \times \\ & \cos(A - 2s) \cos(A - 2\lambda) \} ds. \end{aligned}$$

Let  $v = 1$ .

**Theorem 3.** *The spectra of the operator  $\tilde{H}_2$  are purely discrete, and consists of no more than six eigenvalues.*

### REFERENCES

1. E. Schrödinger. (1941) Spin and Exchange. *Proc. Roy. Irish. Acad. A*, **48**, 39.
2. Bogolubov N.N. (1949) Lectures on quantum statistics, Kiev.
3. E. L. Nagaev. (1982) Anomalous magnetic structures and phase transitions in Non-Heisenberg magnets. *Advances in physical sciences*, Vol. 132, No 1, 1982, pp.61 -103. (in Russian)



**Секция 5**  
**Вопросы преподавания математики,**  
**механики и информатики**

УДК 378.147

**К ВОПРОСУ О СКВОЗНОЙ ЦИФРОВИЗАЦИИ  
В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ 27.03.05 ИННОВАТИКА**

И.А. Ботыгин, О.Б. Шамина, Т.В. Калашникова, В.С. Филимонова

Национальный исследовательский Томский политехнический  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: bia@tpu.ru

***Аннотация.** Описывается структура и содержание авторского подхода в формировании цифровых компетенций студентов при обучении по государственной образовательной программе 27.03.05 «Инноватика». Показано, как можно сформулировать профессиональные задачи и какими могут быть комплексные индивидуальные задания и проекты по дисциплинам модулей направления подготовки и специализации для формирования компьютерных навыков и умений студентов.*

***Ключевые слова.** Инноватика, цифровизация, проектное обучение, цифровые технологии.*

Цель специализации «Управление технологическими проектами и инновациями» состоит в формировании системно мыслящих инженеров-инноватиков, подготовленных к организационной, управленческой и предпринимательской деятельности в условиях постоянно изменяющейся среды, в том числе цифровой, и нацеленных на технологическое развитие страны. Программа ориентируется на «Концепцию технологического развития на период до 2030 года» [1] для решения задачи обеспечения технологического суверенитета нашей страны.

Предлагается комплексная подготовка специалистов, в основе которой лежит проектно-ориентированное и проектно-организованное обучение. Обучение по программе предполагает трехуровневую модель проектной деятельности: вводный курс, учебные и исследовательские / индустриальные проекты. Работа над инновационным проектом требует не только умения собрать команду из нужных специалистов и грамотно распределить роли в команде, но также умения читать схемы и чертежи, работать с конструкторской документацией, так как генерация технических решений невозможна без выбора пространственного объекта и понимания принципа его работы.



Ниже представлены междисциплинарные задания-проекты, ориентированные на дисциплины образовательной программы, но с обязательным использованием инструментария информационных технологий.

Задание-проект №1. «Управление технологическими инновациями» – «Цифровая культура». Согласование корпоративной стратегии и инновационного процесса. На основе авторского выбора бизнес-деятельности разработать сайт, отражающий стратегию авторского бизнеса и стратегию инновационной деятельности в этом бизнесе. Использовать для управления инновационной деятельностью схему параллельного проектирования нового бизнеса.

Задание-проект №2. «Методы принятия управленческих решений» – «Функциональное, информационное и объектное моделирование бизнес-процессов». Представить концепцию, принципы, классификацию, методы, модели, разработку, выполнение и оценку эффективности управленческих решений с использованием интеллектуального построения диаграмм процессов.

Задание-проект №3. «Управление стартапом» – «WEB-технологии» – «Функциональное, информационное и объектное моделирование бизнес-процессов». Осуществить описательное, аналитическое и исполняемое моделирование бизнес-процессов стадий жизненного цикла авторского стартап-проекта с использованием нотации BPMN (Business Process Model and Notation).

Задание-проект №4. «Основы деловой коммуникации» – «Угрозы кибербезопасности» – «Учебная практика по развитию цифровых компетенций». Провести авторское исследование методов и подходов при обеспечении кибербезопасности.

Задание-проект №5. «Технологии управления данными» – «Интеллектуальные системы и технологии». Формирование инфраструктуры системы управления данными для интеллектуального анализа в авторской предметной области.

Задание-проект №6. «Управление стартапом» – Архитектура интернет-приложений» – «Интеллектуальные системы и технологии. Формирование контент-ориентированной инфраструктуры авторского стартапа..

Задание-проект №7. «Управление инновационными проектами» – «Digital-технологии в инноватике». Исследование IT-систем (BPMS) для моделирования, исполнения, контроля и оптимизации бизнес-процессов.

Задание-проект №8. «Управление процессами» – «Модуль доп. специализации \ УИРС». Визуализация данных и введение в программирование.

Задание-проект №9. «Управление инновационными проектами» – «МДС \ УИРС». Исследование CRM-систем для моделирования, исполнения, контроля и оптимизации бизнес-процессов при управлении инновационными проектами в высокотехнологичных отраслях.

Задание-проект №10. «Электронный бизнес и менеджмент интернет-проектов» – «МДС» – «Облачные вычисления». Исследование облачных сервисов для использования в электронном бизнесе и менеджменте интернет-проектов.

Задание-проект №11. «Преддипломная практика» – «Выпускная квалификационная работа» – «Инфографика». Исследование способов передачи информации в виде краткого схематичного визуализированного контента (текст, изображения, графики).

Предложенные структура и содержание сквозной цифровизации образовательной программы по «Инноватике» носят экспериментальный учебно-обобщённый характер, но для студентов, погружившихся в реальную работу, задания-проекты персонифицируются с учётом задач в выбранной области деятельности.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Распоряжение Правительства РФ от 20 мая 2023 г. № 1315-р Об утверждении Концепции технологического развития на период до 2030 г. // ГАРАНТ-СЕРВИС. [2023]. URL: <https://base.garant.ru/406931204/> (дата обращения: 10.07.2023).

## **ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ИХ ГРАФИКОВ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Я.С. Гриншпон, И.Э. Гриншпон

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [grinshpon@mail.ru](mailto:grinshpon@mail.ru)

***Аннотация.** В статье представлен опыт авторов по формированию у учащихся целостного восприятия функционального подхода в математике путём изучения числовых функций и построения их графиков на том этапе их изучения, когда ещё не введено понятие производной. Непосредственное исследование свойств функций без применения аппарата дифференциального исчисления позволяет учащимся на более глубоком уровне уяснить смысл функциональных зависимостей и освоить навыки осознанного построения и чтения графиков. Результат работы авторов оформлен в виде учебно-методического пособия и апробирован на студентах первого курса.*

***Ключевые слова.** Функции, свойства функций, графики функций, методика обучения математике.*

## **FEATURES OF STUDYING AND GRAPHING FUNCTIONS WITHOUT USING DIFFERENTIAL CALCULUS**

Ya.S. Grinshpon, I.E. Grinshpon

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36,

E-mail: [grinshpon@mail.ru](mailto:grinshpon@mail.ru)

***Abstract.** The article presents the authors' experience in developing in students a whole perception of the functional approach in mathematics by studying and graphing numeral functions at the stage when the concept of derivative has not yet been introduced. Direct research function properties without differential calculus allows students to understand the meaning of functional dependencies deeper and to improve the skills of conscious drawing and reading graphs. The result of the authors' work is presented in the form of an educational manual and tested on first-year students.*

**Keywords.** *Functions, function properties, graphs, teaching methods in math.*

Понятия числовой функции и ее графика являются одними из ключевых и основополагающих не только в математике, но и практически в любой сфере человеческой деятельности, исследующей закономерности между величинами, допускающими числовые характеристики. Поэтому осмысленное овладение этими понятиями – это важный результат обучения математике в школе и вузе.

Знакомство с функциями и их графиками происходит в 7 классе школы на примере линейной функции, а затем закрепляется в 9 классе при изучении квадратичной функции. Также подробно изучаются свойства и графики многих основных элементарных функций (степенная функция с натуральными показателями, обратная пропорциональность, квадратный и кубический корни, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические функции) и разбираются примеры построения графиков некоторых неэлементарных (кусочно-заданных или с выколотыми точками) функций, в том числе, функций, содержащих знак модуля. Нельзя не отметить, что задание повышенного уровня сложности на построение графика неэлементарной функции содержится в КИМ ОГЭ.

Тем не менее, опыт преподавания математического анализа первокурсникам, обучающимся на инженерных, физико-математических и естественнонаучных специальностях университета, показывает, что большинство выпускников школ не имеют четкого понимания общих правил работы с графиками произвольных функций, а только знают набор отдельных рецептов (как построить график квадратичной функции, как выглядит график модуля и т.д.). Эта фрагментарность в восприятии свойств функций приводит к затруднениям при исследовании как элементарных функций (степенная с целым отрицательным показателем, дробно-линейная, кубическая, получаемая сдвигом графика основной функции, обратная тригонометрическая), так и неэлементарных (содержащих модуль, целую или дробную части числа).

С целью помощи студентам, приступающим к изучению математического анализа в вузе, путем систематизации основных сведений о функциях и структуризации различных навыков, связанных с построением их графиков без применения производной, авторы разработали учебно-методическое пособие [1].

В этом пособии сначала вводится понятие функции (как на интуитивном школьном языке «соответствий между элементами двух множеств», так и на строгом математическом языке «подмножества декар-

тового произведения двух множеств») и последовательности, как частного случая функции с областью определения в виде множества натуральных чисел. Приводятся примеры функций, в том числе, непривычные для школьников функция Эйлера, функция Дирихле, знак числа, целая часть числа, функция Хевисайда.

Далее формулируются определения других базовых понятий (инъекция, сюръекция, биекция, композиция функций, обратная функция) и основных свойств числовых функций (монотонность, ограниченность, четность, периодичность, наличие экстремумов и асимптот).

Главная содержательная часть пособия посвящена полной классификации основных элементарных функций с перечислением их свойств и приведением графиков (включая мало изучаемые в школе виды степенных функций и обратные тригонометрические функции) и полной классификации линейных преобразований графиков функций (параллельный перенос, сжатие, растяжение, отражение относительно оси абсцисс).

Далее эти знания закрепляются при исследовании в общем виде графиков линейных, квадратичных, дробно-линейных и кубических функции и гармонических колебаний. Отдельно разбираются особенности построения неэлементарных функций, содержащих знаки модуля, целой или дробной частей. Формулируются правила построения графиков сумм и произведений функций. Изучение всех этих видов функций сопровождаются большим числом конкретных примеров.

Новизна и оригинальность данного пособия заключаются, во-первых, в доказательстве неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (неравенства Коши) и в применении этого неравенства к исследованию функций (в частности, это неравенство позволяет провести исследование монотонности и экстремумов кубической функции без производной), и, во-вторых, в знакомстве читателей со специальной функцией Лапласа (функция нормального распределения) без упоминания интегрального исчисления.

Также пособие содержит ряд упражнений для самостоятельного решения, позволяющих закрепить излагаемый материал.

В целом опыт авторов в течение нескольких последних лет показывает, что введение рамочного изучения свойств функций и их графиков в начале процесса обучения студентов математике (до знакомства с аппаратом предельного перехода и дифференцирования) способствует повышению уровня восприятия ими материала и успешному освоению курса математического анализа.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С. *Функции и графики*. – Томск.: издательский дом ТГУ, 2018. – 110 с.

**Секция 6**  
**Современные задачи механики**

УДК 531/534

## **ВЛИЯНИЕ ИНФРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ПРОЦЕСС ГОРЕНИЯ МЕТАНА**

М.В. Агафонцев, А.А. Старосельцева, Е.Л. Лобода, В.В. Рейно

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup> Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева,  
Россия, г. Томск, пл. Акад. Зуева, 1, 634021

E-mail: amv@mail.tsu.ru, 222-pro@mail.ru, loboda@mail.tsu.ru,  
reyno@iao.ru

***Аннотация.** В данной работе рассматривается влияние пульсаций давления на факел пламени, образующимся при диффузионном горении метана. Проведен анализ поля температуры в пламени, получены соответствующие спектры изменения температуры. Показано, что с увеличением частоты внешнего воздействия на факел пламени наблюдается уменьшение амплитуды пульсации температуры.*

***Ключевые слова.** Горение, углеводороды, метан, математическое моделирование.*

**Введение.** На протяжении многих лет ученые изучают процессы горения различных горючих газов, в том числе и метана. Метан  $\text{CH}_4$  является наиболее перспективным видом топлива для многих отраслей промышленности и сельского хозяйства. Благодаря высокой теплоте сгорания и низкой стоимости, метановые горелки широко применяются в различных отраслях промышленности.

Исследованию процессов, происходящих при сжигании метановоздушных смесей, посвящено большое количество работ. Актуальными темами исследований являются расчетные и экспериментальные работы по поиску различных способов воздействия на факел пламени, способствующих перемешиванию и сгоранию метана с окружающим воздухом. Примером такого воздействия является, внешнее воздействие в виде пульсаций давления. Исследованию влияния внешних воздействий в виде пульсаций давления посвящено достаточно много работ [1–6].



В данной работе рассматривается влияние пульсаций давления на факел пламени, образующимся при диффузионном горении метана. Одним из методов математического описания процесса горения является численное решение системы уравнений Навье–Стокса для реагирующего газа. Для получения температуры, скорости потока и других характеристик течения использовался программный комплекс «Ansys Fluent».

**Постановка задачи.** Моделирование процесса горения метановоздушной смеси осуществлялось с использованием программы «Ansys SpaceClaim» для построения геометрии расчетной области и «Ansys Meshing» для задания сетки, а также решатель «Ansys Fluent». При моделировании нестационарного горения решалась двумерная система уравнений Рейнольдса (модель RANS), уравнение энергии, уравнение состояния газа и уравнения для скалярных величин, описывающих концентрацию химических веществ, участвующих в реакции горения, стандартные уравнения для моделирования турбулентных течений (k-ε модель). Для моделирования процесса горения была использована модель Eddy-Dissipation. Описанная система уравнений решалась методом контрольного объема. Размер расчетной области составлял  $500 \times 200$  мм, а размер горелки -  $20 \times 4$  мм. Количество ячеек расчетной сетки составило 101005 шт. Размеры ячейки вблизи границ расчетной области имели размеры  $0.5 \times 0.5$  мм, со сгущением к границе вблизи выходной части горелки.

**Результаты математического моделирования.** В результате численной реализации двумерной математической модели процесса горения метановоздушной смеси были получены профили температуры и модуля скорости в факеле пламени при различных режимах внешних воздействий. В дальнейшем производилась их обработка с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Анализируя спектры изменений температуры можно заметить, что они имеют характерные амплитудные максимумы, соответствующие как основной частоте воздействия, так и первым двум гармоникам. Кроме этого, было проведено измерение максимального диапазона пульсаций температур и скорости вращения.

Анализ полученных спектров показывает, что пульсации температуры уменьшаются при увеличении частоты внешнего воздействия. Эта зависимость обусловлена стабилизацией течения в факеле.

**Заключение.** Проведя математическое моделирование процесса диффузионного горения метана при наличии внешнего источника звуковых колебаний определенной частоты и амплитуды, удалось сделать вывод о том, что наличие пульсаций давления приводит к незначи-

тельному повышению температуры в результате интенсификации смешения горючего с окислителем. С ростом частоты внешнего воздействия на факел пламени, амплитуда пульсации температуры уменьшается.

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
Гранта Президента РФ № МК-2078.2022.1.1.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zong R., Kang R., Liu C., Zhang Z., Zhi Y. Analysis of Flame Extinction and Height in Low Frequency Acoustically Excited Methane Jet Diffusion Flame // *Microgravity Sci. Technol.* – 2018. – V. 30. – pp. 237.
2. Bourehla A., Baillot F. Appearance and stability of a laminar conical premixed flame subjected to an acoustic perturbation // *Combust. Flame.* – 1998. – V. 114. – pp. 303.
3. Matsubara Y., Takita K., Masuya G. Combustion enhancement in a supersonic flow by simultaneous operation of DBD and plasma jet // *Proc. Combust. Inst.* – 2013. – V. 34. – pp. 3287–3294.
4. Do H., Cappelli M.A., Mungal M.G. Plasma assisted cavity flame ignition in supersonic flows // *Combust. Flame.* – 2010. – V. 157. – pp. 1783–1794.
5. Leonov S.B., Kochetov I.V., Napartovich A.P., Sabel’nikov V.A., Yarantsev D.A. Plasma-Induced Ethylene Ignition and Flameholding in Confined Supersonic Air Flow at Low Temperatures // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2010. – V. 39. – pp. 781–787.
6. Leonov S.B., Yarantsev D.A., Napartovich A.P., Kochetov I.V., Ignition I., Researcher L. Plasma-Assisted Ignition and Flameholding In High-Speed Flow // *In Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Reno, NV, USA, 9–12 January 2006.*

УДК: 521.35

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ВАРИАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НАЧАЛЬНОГО РАЗБРОСА ТРАЕКТОРИЙ

А.П. Батурин

НИИ ПММ ТГУ,  
634050, г.Томск, пр.Ленина, 36

E-mail: apbaturin@mail.tsu.ru

**Аннотация.** Разработан способ вычисления линии вариации (LOV) в начальной доверительной области, основанный на поиске условного экстремума квадрата вектора нормали к уровенной поверхности целевой функции метода наименьших квадратов. Способ апробирован для трех астероидов, наблюдаемых на короткой дуге орбиты, и может быть использован в дальнейшем при построении начального разброса траекторий

**Ключевые слова:** линия вариации, LOV, нелинейность, нормаль

Линией вариации [1] (англ. LOV – line of variation) при улучшении орбиты принято называть направление наибольшей вытянутости доверительной области начальных параметров движения. Минимизируемая функция в задаче улучшения орбиты как правило имеет вид

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n (\Delta\alpha_i^2 \cos^2 \delta_i^{(o)} + \Delta\delta_i^2), \text{ где } \Delta\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{q}) - \alpha_i^{(o)}, \Delta\delta_i = \delta_i(\mathbf{q}) - \delta_i^{(o)}$$

– разности вычисленных и измеренных значений прямого восхождения и склонения объекта соответственно;

$\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (q_1, \dots, q_6)$  – искомый вектор улучшаемых начальных параметров движения (прямоугольных координат и компонент скорости объекта);  $n$  – число наблюдений.

Уровенная поверхность функции  $S(\mathbf{q})$  задается выражением  $S(\mathbf{q}) = K$ , где  $K$  – некоторая константа. Вектор нормали к этой поверхности имеет вид  $\mathbf{N} = (\partial S / \partial q_1, \dots, \partial S / \partial q_6)$ . Поэтому задачу поиска точки, принадлежащей одновременно и линии вариации и уровенной поверхности, можно представить как задачу условной минимизации

$$\Phi(\mathbf{q}) = N^2 + \lambda(S(\mathbf{q}) - K) \rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $N^2 = (\partial S / \partial q_1)^2 + \dots + (\partial S / \partial q_6)^2$  – квадрат модуля вектора нормали,  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Условием максимума (1) является равенство нулю производных по определяемым параметрам и  $\lambda$ :

$$F_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = \frac{\partial N^2}{\partial q_j} + \lambda \frac{\partial S}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, 6),$$
$$F_7 = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = S(\mathbf{q}) - K = 0.$$
(2)

Система (2) решается итерационным методом дифференциальных поправок.

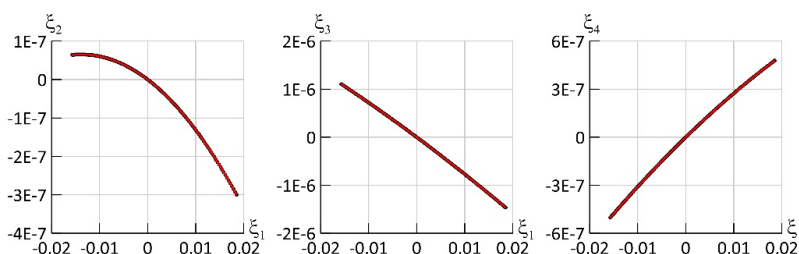
Для задания константы  $K$ , определяющей конкретную уровенную поверхность, использовалось значение  $S(\mathbf{q})$ , вычисляемое на конце самой короткой полуоси доверительного эллипсоида с заданным коэффициентом увеличения  $k$ , поскольку это значение практически одинаково [2] и для поверхности доверительного эллипсоида, и для уровенной поверхности функции  $S(\mathbf{q})$ .

Для вычисления линии вариации было выбрано три астероида (2007 KO4, 2017 SA12 и 2017 SD11), имеющих небольшую дугу наблюдаемости и, следовательно, заметную нелинейность в задаче улучшения орбиты, которая характеризуется так называемым коэффициентом нелинейности, определяемым по-разному. Здесь использован коэффициент  $\chi = 0.5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / (\sigma_{\min} - \sigma_0)$ , где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  – максимальная и минимальная среднеквадратическая ошибка представления наблюдений на концах двенадцати полуосей доверительного эллипсоида (с коэффициентом увеличения 4.5).

Коэффициент увеличения  $k$ , задающий уровенную поверхность функции  $S(\mathbf{q})$ , варьировался от 0.1 до 6 с шагом 0.1. Для каждого значения  $k$  решалась система (2), т.е. находилась точка линии вариации, расположенная на соответствующей уровенной поверхности. В качестве начального приближения при  $k = 0.1$  использовалась точка, расположенная на конце наибольшей оси доверительного эллипсоида, соответствующего этому значению  $k$ . Для всех последующих уровенных поверхностей в качестве начального приближения использовалось решение, полученное для предыдущей поверхности. Этот же процесс был повторен для противоположного направления линии вариации: сначала (при  $k = 0.1$ ) было взято начальное приближение на противоположном конце наибольшей оси эллипсоида, а затем полученное на

каждой поверхности решение использовалось как начальное приближение для последующей поверхности.

Для всех трех астероидов получены похожие результаты. На рисунке приведены результаты для 2007 КО4 в системе координат  $\xi_1, \dots, \xi_6$ , определяемой доверительным эллипсоидом (из-за недостатка места результаты приведены только для  $\xi_2, \xi_3, \xi_4$ ). Единицы измерения для этих осей трудноопределимы и потому не изображены (в исходной системе координаты заданы в а.е., скорости – в а.е./сут) В качестве горизонтальной оси везде выбрана ось  $\xi_1$ , поскольку линия вариации всегда вытянута преимущественно вдоль нее.



Как видно из рисунка, линия вариации представляет собой кривую, заметно несимметричную относительно начала координат.

Для всех астероидов была выполнена аппроксимация данных на графиках с помощью полинома 2-й и 3-й степени. Сравнение результатов показало, что наилучшим является полином 3-й степени, так как при использовании полинома 2-й степени могут оставаться заметные (даже на глаз) невязки, а полином 3-й степени аппроксимирует полученные данные практически идеально. Минимальный коэффициент детерминации ( $R^2$ ) для всех аппроксимаций графиков полиномом 3-й степени составляет 0.9999967. Аппроксимирующая кривая изображена на рисунке красным цветом. Полученные аппроксимирующие полиномы для координат  $\xi_2, \dots, \xi_6$  можно рассматривать как уравнения линии вариации (с независимой переменной  $\xi_1$ ), определяющие ее с достаточной на практике точностью.

Выполненное исследование позволяет заключить, что способ условной минимизации (1) позволяет определять линию вариации при сильной нелинейности в задаче улучшения орбиты, а применение полиномов 3-й степени позволяет получить довольно точную аппрокси-

мацию этой линии, что позволяет использовать ее в дальнейшем, например, при построении начального разброса траекторий.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2020-0049). Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Терскольская обсерватория”.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Milani A., Knežević Z. From astrometry to celestial mechanics: orbit determination with very short arcs // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2005. V. 92. № 1. P. 1-18.
2. Батурин А.П. Оценивание вероятности столкновения астероидов с Землей при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты // *Астрон. вестн.* 2023. Т. 57. № 4. С. 373–384.

УДК 532.5.013

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

И.В. Вахрамеев

Сибирский федеральный университет,  
Россия, г. Красноярск, Свободный пр., 82А, 660041

E-mail: vahrameevi@mail.ru

***Аннотация.** Исследована нестационарная краевая задача о движении жидкости во вращающейся цилиндрической трубе. Для описания движения жидкости используются уравнения Обербека-Буссинеска. С математической точки зрения задача является обратной относительно градиента давления вдоль оси цилиндра. На основе априорных оценок получены условия, при которых решение нестационарной обратной задачи является экспоненциально устойчивым. Методом разделения переменных решение найдено в виде специальных рядов Фурье. Даны достаточные условия выхода решения нестационарной задачи с ростом времени на стационарный режим.*

***Ключевые слова.** Конвекция, обратная задача, априорные оценки, метод разделения переменных, функции Бесселя.*

**Введение.** Рассматривается задача о тепловой конвекции жидкости во вращающейся цилиндрической трубе. В настоящей работе угловая скорость круглой трубы зависит от времени, движение является вращательно симметричным и нестационарным. Кроме того, расход жидкости через поперечное сечение трубы также есть функция от времени. Массовые силы отсутствуют, что имеет место при достаточно большой угловой скорости вращения трубы или в условиях близких к невесомости. Вдоль поверхности трубы приложен постоянный градиент температуры. С математической точки зрения возникает обратная начально-краевая задача, где дополнительно требуется определить нестационарный градиент давления вдоль оси трубы, причём условием переопределения является расход жидкости.

**Постановка задачи.** В качестве математической модели используются уравнения Обербека–Буссинеска. Пусть  $r, \phi, z$  цилиндрические координаты,  $t$  время,  $a$  радиус цилиндра и  $\omega(t)$  угловая скорость его вращения вокруг оси  $z$ . Далее,  $u$  и  $w$  суть радиальная и осевая компонента вектора скорости;  $v$  есть разность между азимутальной скоро-

стью и скоростью вращения жидкости  $\omega(t)r$  как твёрдого тела;  $p$  отклонение истинного давления от состояния равновесия  $\rho\omega^2(t)r^2/2$ ;  $\Theta$  отклонение абсолютной температуры от её среднего значения  $\bar{\Theta} = const$ . Жидкость характеризуется физическими параметрами: плотность  $\rho$  при температуре  $\Theta$ , кинематической вязкостью  $\nu$ , коэффициентами термодиффузии  $\chi$  и теплового расширения  $\beta$ . Ниже эти параметры предполагаются постоянными и положительными. Частично инвариантное решение поставленной задачи ищется в виде [1]

$$u = u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t),$$

$$\Theta = -Az + T(r, t), \quad p = \rho \left[ A\beta\omega^2(t) \frac{r^2}{2} + f(t) \right] z + q(r, t).$$

Здесь  $f(t)$  есть неизвестный градиент давления вдоль оси  $z$ , а  $A$  постоянный градиент температур. Предполагая, что на оси  $z$  отсутствуют источники или стоки, получим  $u = 0$  и систему уравнений для неизвестных функций  $w(r, t), v(r, t), T(r, t), f(t)$

$$w_t = \nu \left( w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) - \frac{1}{2} A\beta\omega^2(t)r^2 - f(t),$$

$$v_t + w_t(t)r = \nu \left( v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$T_t = \chi \left( T_{rr} + \frac{1}{r} T_r \right) + Aw, \quad q_r = \frac{\rho\nu^2}{r}.$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$w(r, 0) = w_0(r), \quad v(r, 0) = v_0(r), \quad T(r, 0) = T_0(r), \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$w(a, t) = 0, \quad v(a, t) = 0, \quad T(a, t) = 0, \quad t \in [0, t_1];$$

$$|w| < \infty, \quad |v| < \infty, \quad |T| < \infty, \quad r \rightarrow 0.$$

Кроме того, задаётся объёмный расход через поперечное сечение трубы

$$\int_0^a r w(r, t) dr = \frac{Q(t)}{2\pi}.$$

Задача для  $v(r, t)$  отделяется, при известной  $w(r, t)$  функция  $T(r, t)$  находится как решение классической первой начально-краевой задачи, а  $q(r, t)$  можно получить интегрированием. Поставленная обратная задача имеет стационарное решение (с индексом  $s$ ) описанное в [2].



**Результаты.** На основе априорных оценок даны достаточные условия на входные данные, при которых решение основной обратной задачи является экспоненциально устойчивым ( $k = 1, \dots, 5$ ):

$$|\omega(t) - \omega^s| \leq e^{-\frac{2\nu}{a^2 t}} h_1(t), |\omega_t^2(t)| \leq e^{-\frac{2\nu}{a^2 t}} h_2(t), \int_0^\infty h_k(t) dt < \infty,$$

$|Q(t) - Q^s| \leq e^{-\frac{4\nu}{a^2 t}} h_3(t), |Q_t(t)| \leq e^{-\frac{4\nu}{a^2 t}} h_4(t), |Q_{tt}(t)| \leq e^{-\frac{4\nu}{a^2 t}} h_5(t)$ . Решение для основной задачи найдено в виде рядов Фурье-Бесселя и выглядит следующим образом

$$w = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{\xi_k} \left[ \int_0^t u_k(\tau) e^{\frac{\nu \xi_k}{a}(\tau-t)} d\tau + C_{0k} e^{-\frac{\nu \xi_k}{a} t} \right] \left[ J_0\left(\frac{\xi_k}{a} r\right) - J_0(\xi_k) \right] + \frac{10}{\pi a^5} Q(t)(a-r)r^2 + d(t) \left( r^3 - \frac{6}{5} ar^2 + \frac{1}{5} a^3 \right),$$

где  $\xi_k$  есть корни уравнения  $J_2(\xi_k) = 0$ .

$$d(t) = \frac{25}{3\pi a^5} [Q(t) - Q(0)] + \frac{5A\beta}{12a} \int_0^t \omega^2(\tau) d\tau,$$

$$u_k = C \int_0^a r \left[ 9\nu d(t) - \frac{90}{\pi a^5} Q(t) + \left( \frac{30}{\pi a^5} Q_t(t) - 3d_t(t) \right) r^2 \right] J_1\left(\frac{\xi_k}{a} r\right) dr,$$

$$C_{0k} = C \int_0^a r \left( w_{0,r}(r) + \frac{30}{\pi a^5} Q(0)r^2 \right) J_1\left(\frac{\xi_k}{a} r\right) dr, \quad C = \frac{2}{a^2 J_1^2(\xi_k)},$$

$$f(t) = 2\nu w_r(a, t) - \frac{1}{4} A\beta \omega^2 a^2 - \frac{Q_t(t)}{\pi a^2} - \frac{20\nu}{\pi a^4} Q + \frac{6\nu a}{5} d(t).$$

**Заключение.** Полученное решение позволяет найти количественные характеристики конвекции. В итоге, можно установить условия, при которых появляются возвратные движения, которые могут значительно улучшить теплопередачу, что важно для теплообменников. Таким образом, задавая расход и угловую скорость как функции времени, можно управлять тепловой конвекцией в трубе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. – 400 с.
2. Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. Mathematical Models of Convection. 2nd edition, Berlin/Boston. 2020. – 416 p.

УДК 538.91+519.65

## **О НАИМЕНЬШЕЙ СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ ПРИ ИХ ОБТЕКАНИИ ЛАМИНАРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

С.О. Гладков, Н.С. Нагибин

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
125993, г. Москва, Волоколамское ш., д.4.

E-mail: sglad51@mail.ru, nikita.nagibin@bk.ru

***Аннотация.** С помощью уравнения Прандтля показано, что форма контура, при котором сила сопротивления минимальна, соответствует сечению контура рыбы.*

***Ключевые слова:** уравнение Прандтля, пограничный слой, число Рейнольдса, численное решение.*

Вопрос, о котором далее пойдет речь в настоящем сообщении, вполне может быть приравнен к проблеме синергетического описания природной силы сопротивления, которую испытывают все без исключения тела при их обтекании вязким потоком жидкого или газового континуума. Решаемая здесь задача направлена прежде всего на аналитическое выяснение той формы тел, которая приводит к наименьшему с точки зрения Природы сопротивлению. Ее формальное решение будет найдено с помощью использования принципа экстремума для функционала силы сопротивления, и с этой целью нам потребуется применить все основные гидродинамические уравнения, а также методы решения экстремальных задач. Аналогично можно также задаться и вопросом о том, какова должна быть форма тел для осуществления, например, эффективного плавания. В этом случае следует вспомнить факт того, что в большом количестве примеров физическая скорость движения обычно не велика, а число Рейнольдса  $R$  в стоксовом приближении, то есть в области шириной  $\delta$ , мало. То есть в непосредственной близости к поверхности тела важную роль должно играть межмолекулярное взаимодействие. Если речь идет о сечении тела (которое мы и рассматриваем), то для него также, как и в трехмерном случае, вне пограничного слоя даже при ламинарном течении число Рейнольд-

са  $R = \frac{u\bar{a}}{\nu}$  может быть велико, где  $u$  – скорость потока,

$\bar{a} = \sqrt{ab}$  – средний линейный размер сечения,  $a$  – размер тела вдоль оси  $X$ , а  $b$  – вдоль  $Z$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Для решения поставленной задачи нам необходимо провести анализ уравнений Навье – Стокса и уравнения непрерывности в двухмерном базисе, предполагая тело плоским, но имеющее конечный размер. Его толщину обозначим как  $h$ .

Жидкость считается несжимаемой. Ось  $y$  направим перпендикулярно продольному сечению тела, а скорость стационарного потока  $u$  выберем в качестве оси  $X$ .

В непосредственной близости к поверхности тела уравнение Навье – Стокса сводится к весьма специфическому уравнению, которое во введенных нами координатах будет иметь вид (см. с [1])

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости. Уравнение (1) справедливо, если выполняется условие  $v_x \gg v_z$ . Поскольку продольные размеры тела конечны, то благодаря этому факту в операторе Лапласа были учтены обе вторые частные производные в отличие от уравнения, которое решал Блазиус. Как увидим далее, именно учет двухмерности оператора Лапласа позволяет нам найти автомодельное решение несколько иного вида, чем решение, полученное Блазиусом.

Если предположить, что течение вдоль оси  $X$  потенциально (что подтверждается последующими вычислениями), мы можем воспользоваться уравнением Бернулли, и записать его в виде закона сохранения энергии (см. [1]):  $P + \frac{\rho v_x^2}{2} = \frac{\rho U^2}{2}$ . Если считать скорость  $U$  постоянной

(в частности, это может быть, например, скорость звука), это уравнение сильно упростится, и вместе с уравнением непрерывности мы приходим к следующей системе уравнений:

$$v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Решения системы (2) при  $x, z \rightarrow \infty$  должны удовлетворять двум следующим асимптотическим условиям  $v_x \rightarrow u$ ,  $v_z \rightarrow 0$ . Помимо этих условий на контуре тела, полагая  $z = \eta(x)$ , должна исчезать также нормальная компонента скорости  $v_n$ . Положим, что

$$v_x = u + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где функцию  $\psi = \psi(x, z)$  нам следует

найти. Если теперь подставить эти формулы в первое уравнение системы (2), то для решения полученного уравнения удобно ввести без-

размерную функцию  $\varphi = \frac{\psi}{u\sqrt{ab}}$ . В результате для нее имеем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + R \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где число Рейнольдса  $R = \frac{u\sqrt{ab}}{\nu}$ . Как видим, уравнение (3) допускает

автомодельное решение, которое можно получить с помощью нового

аргумента  $\xi = \frac{z}{x}$ . Следовательно, искомая функция должна иметь

вид:  $\varphi = \varphi(\xi)$ . После ее подстановки в уравнение (3) находим:

$$(\xi^2 + 1)\varphi''' + 4\xi\varphi'' + 2\varphi' - R\varphi'\varphi'' = 0.$$

Благодаря асимптотическому поведению скорости в соответствии с условиями  $v_x \rightarrow 0$  при  $x, z \rightarrow \infty$ , то должно также выполняться и

условие  $\varphi' \rightarrow 0$ . В результате для скорости получаем

$$v_x = u \left( 1 + \frac{\sqrt{ab}}{x} G \right), \quad v_z = \frac{u\sqrt{ab}\xi}{x} G,$$

где  $G = \varphi'$ . Поэтому имеем

уравнение  $(\xi^2 + 1)G'' + 4\xi G' + 2G - RGG' = 0$ . Его решение есть

$$G(\xi) = \frac{1}{C_2(\xi^2 + 1) - \frac{R}{4} \left[ \xi + (\xi^2 + 1) \arctg \xi \right]}. \quad (4)$$

где  $C_2$  – константа интегрирования. Для вычисления полной силы сопротивления следует принять во внимание обтекание как по торцам тела, так и обтекание по его боковым граням. Это несложно осуществить, считая тело симметричным. В результате получим

$$\begin{aligned}
 F_c = & -4\mu \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} \eta(x) dx + \\
 & + 2\mu h u \sqrt{ab} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( \frac{2\eta'(x)}{x^2} \left( G(\xi) + \frac{\eta(x)}{x} G'(\xi) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{G'(\xi)}{x^2} - \frac{\eta(x)}{x^3} \left( 2G(\xi) + \frac{\eta(x)}{x} G'(\xi) \right) \right) - \left( \frac{1}{a} + \frac{G(\xi)}{x} \right) \eta''(x) \right) \right] \Big|_{z=\eta} dx.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из условия экстремума функционала (5) в результате несложных преобразований приходим к уравнению

$$\left[ \eta'' - \frac{\eta'}{x} \left( 2 + \frac{\eta G''}{x G'} \right) + \frac{3\eta}{x} - \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{2\eta^2}{x^2} \right) \frac{G''}{G'} \right] \Big|_{z=\eta} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (7) и общее решение (4) составляют полную замкнутую систему, которая позволяет найти интересующую нас форму контура  $\eta(x)$ . Для малых чисел Рейнольдса из уравнения (6) получаем

$$\eta'' - \frac{\eta'}{x} \frac{3x^2 - \eta^2}{x^2 + \eta^2} + \frac{3\eta}{x^2} - \frac{1}{\eta} \frac{x^2 - 3\eta^2}{x^2 + \eta^2} \left( 1 - \frac{2\eta^2}{x^2} \right) = 0. \tag{7}$$

Численное решение уравнения (7) показано на рисунке 1.

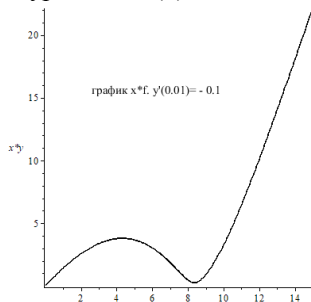


Рис. 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука. 1988. 733 с.
2. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука. 1971. 424 с.
3. С.О. Гладков. О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. В. 6. С. 103 – 105.
4. С.О. Гладков. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 59. В. 3. С. 377 – 341.
5. С.О. Гладков. К вопросу о выводе формулы Магнуса. Доклады РАН. 2022. Т. 507. В. 2. С. 20 – 23. DOI: 10.31857/S2686740022060086.

УДК 539.37:691.32

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ СТенок ТРУБЫ ИЗ ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННОГО АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА ПОСЛЕ СНЯТИЯ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

О.И. Данейко, О.В. Матвиенко

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: olya\_dan@mail.ru

***Аннотация.** Проведено исследование формирования остаточных напряжений после деформации стенок трубы в результате снятия воздействия внешнего и внутреннего давления. Величина остаточных окружных и осевых напряжений более чем на порядок превосходит величину остаточных радиальных напряжений.*

***Ключевые слова:** дисперсно-упрочнённые материалы, разгрузка, остаточные напряжения.*

**Введение.** В процессе эксплуатации в элементах конструкций могут возникать остаточные напряжения, которые влияют на прочностные характеристики. Целью настоящей работы является исследование остаточных напряжений в трубе, изготовленной из дисперсно-упрочненного сплава на основе алюминия, в состоянии разгрузки после упругопластического деформирования. Для описания пластических свойств материала использована математическая модель пластической деформации дисперсно-упрочненных сплавов с некогерентными частицами [1]. Зависимость предельного напряжения сдвига  $\tau_s$  от степени деформации  $a$  моделируется зависимостью [2]:

$$\tau_s = \max \left[ \tau_0, \tau_0 + \tau_1 \frac{Ga - \tau_0}{G(a + a_*) - \tau_0} \right], \quad (1)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $a_1$  – параметры, характеризующие свойства материала.

**Постановка задачи.** Уравнение равновесия, описывающее баланс напряжений в радиальном направлении, имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0.$$

Будем считать, что толстостенная труба с внутренним  $R_{in}$  и внешним  $R_{ex}$  радиусами была нагружена равномерным внешним  $p_{ex}$  и внутренним  $p_{in}$  давлением.

**Результаты.** Если в процессе деформации материал стенок трубы перешел в пластическое состояние, то материал в зоне пластической деформации будет характеризоваться остаточными напряжениями и деформациями. В бывшей пластической области после снятия нагрузки будут действовать напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -p_{in} \left( 1 + \frac{R_{in}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 - \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right) \right) + p_{ex} \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 - \frac{R_{in}^2}{r^2} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) (\tau_0 + 2\tau_1) \ln \left( \frac{r}{R_{in}} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) \tau_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{a_2 G} \right) \ln \left( \frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 G R_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 G r^2} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = & -p_{in} \left( 1 + \frac{R_{in}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 + \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right) \right) + p_{ex} \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 + \frac{R_{in}^2}{r^2} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) (\tau_0 + 2\tau_1) \ln \left( \frac{r}{R_{in}} \right) + \tau_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{a_2 G} \right) \ln \left( \frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 G R_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 G r^2} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) \tau_0 \left( 1 + \frac{\tau_1 (R_{pl}^2 - r^2)}{a_2 G r^2 + \tau_0 R_{pl}^2} \right). \end{aligned}$$

В бывшей упругой области ( $R_{pl} < r$ ) возникает поле остаточных напряжений как реакция на действие остаточных напряжений в бывшей пластической области. Напряжения в бывшей упругой области равны:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\sigma_{rr}^* R_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left( 1 - \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma_{rr}^* R_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left( 1 + \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right).$$

На границе между бывшими упругой и пластической областью ( $r = R_{pl}$ ) радиальные напряжения достигают значений:



$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^* = & -p_{in} \left( 1 + \frac{R_{in}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 - \frac{R_{ex}^2}{R_{pl}^2} \right) \right) + p_{ex} \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \left( 1 - \frac{R_{in}^2}{R_{pl}^2} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) (\tau_0 + 2\tau_1) \ln \left( \frac{R_{pl}}{R_{in}} \right) - \\ & - \text{sign}(p_{ex} - p_{in}) \tau_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{a_2 G} \right) \ln \left( \frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 G R_{in}^2}{(\tau_0 + a_2 G) R_{pl}^2} \right). \end{aligned}$$

Если торцы трубы жестко закреплены, то осевая деформация стенок трубы отсутствует. При этом осевое напряжение равно  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})$ , ( $\nu$  – коэффициент Пуассона).

В результате исследований установлено, что при одном и том же значении приложенного давления для сплавов, упрочненных более крупными частицами, толщина области, подвергнувшейся пластической деформации, оказывается меньше, чем для сплава, упрочненного мелкими частицами. Величина остаточных окружных и осевых напряжений более чем на порядок превосходит величину остаточных радиальных напряжений. Поэтому в первом приближении остаточные радиальные напряжения можно не учитывать.

**Заключение.** В ходе проведенных исследований создана физико-математическая модель разгрузки из упругопластического состояния трубы, изготовленной из дисперсно-упрочнённого сплава на основе алюминия, а также определены поля остаточных напряжений после разгрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Влияние температуры на механические свойства дисперсно-упрочнённых кристаллических материалов с некогерентными наноразмерными частицами // Известия вузов. Физика. – 2018. – Т. 61., № 9 (729). – С. 120–127.
2. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Исследование пластической деформации толстостенной трубы из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами // Известия вузов. Физика. – 2017. – Т. 60., № 2. – С. 35–45.

УДК 622.276.04

## **ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАЗЛИВА НЕФТИ В ЛЕДОВЫХ УСЛОВИЯХ ПЕЧЕРСКОГО МОРЯ**

А.А. Долгов, Е.М. Барышев, А.Ю. Большагин, С.В. Зиновьев,  
Ф.К. Тузов

ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России»  
(федеральный центр науки и высоких технологий)  
(ФГБУ ВНИИ ГОЧС ФЦ),  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, 7, 121352

E-mail: dolaa@rambler.ru

***Аннотация.** Приведены результаты апробации Методических рекомендаций по оценке опасности подводных потенциально опасных объектов во внутренних водах и территориальном море Российской Федерации и Методики расчета выбросов поллютантов и теплоты при горении нефти и нефтепродуктов на различных типах подстилающей поверхности, проводимой в рамках программы Межведомственных опытно-исследовательских учений «Безопасная Арктика – 2023» в европейской части Арктической зоны Российской Федерации.*

***Ключевые слова.** Арктическая зона; ледовые условия; МЛСП «Приразломная»; разливы нефти; горение разливов.*

**Введение.** В период с 4.04 по 7.04. 2023 г. в Арктической зоне Российской Федерации проводились масштабные Межведомственные опытно-исследовательские учения сил и средств единой государственной системы предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций «Безопасная Арктика – 2023». В соответствии с программой Учений осуществлялась опытно-исследовательская отработка потенциально возможных для данного региона природно-техногенных чрезвычайных ситуаций (ЧС). Одна из вводных была посвящена теме разлива нефти при погружке в танкер с морской ледостойкой стационарной платформы (МЛСП) «Приразломная». В рамках данной вводной решались две опытно-исследовательские задачи, посвященные апробации одной методики и одних методических рекомендаций.

**Постановка задачи.** Согласно сценарию Учений, разлив нефти в акватории расположения МЛСП «Приразломная» произошел при ее

погрузке в танкер. Суммарное количество разлитой на акваторию нефти составляет 395 тонн ( $436 \text{ м}^3$ ).

В соответствии с Вводной рассматриваются две задачи: Прогноз развития ЧС, вызванной разливом нефти без воспламенения разлива с использованием Методических рекомендаций по оценке опасности подводных потенциально опасных объектов во внутренних водах и территориальном море Российской Федерации (Методика 1); Прогноз развития ЧС, вызванной разливом нефти с горением разлива посредством Методики расчета выбросов поллютантов и теплоты при горении нефти и нефтепродуктов на различных типах подстилающей поверхности (Методика 2).

**Анализ результатов расчета.** Использование эмпирических выражений из Методики 1 показало, что при возникновении аварийного разлива нефти в количестве  $436 \text{ м}^3$  радиус разлива, площадь и высота пленки нефти в разливе будут меняться во времени и в течение одного часа достигнут такой площади на открытой воде, высота пленки нефти в котором станет меньше критического значения (2 мм). При такой толщине нефтяной пленки на воде, согласно Методике 2, горение нефти станет не возможным. Поэтому, в условиях открытой воды в акватории МЛСП «Приразломная» в случае ЧС, связанной с разливом значительных количеств нефти ( $\geq 400 \text{ м}^3$ ), операции ЛАРН необходимо начинать в течение первого часа.

Оценка параметров разлива нефти в ледовых условиях, проводилась с использованием эмпирических зависимостей, представленных в работе [2]. Показано, что при разливе нефти в количестве  $436 \text{ м}^3$  на ледовую поверхность (на колотый лед и шугу) радиус разлива, площадь разлива и высота нефтяной пленки на льду уже через час достигнут равновесных состояний: радиус пятна,  $R_n - 154 \text{ м}$ ; площадь пятна,  $S_n - 67\,150 \text{ м}^2$ ; высота разлива нефти,  $h_n - 6 \text{ мм}$ .

Сравнение результатов расчета параметров разлива нефти на открытой воде и в ледовых условиях показывает, что и радиус, и, соответственно, площадь разлива нефти в ледовых условиях значительно меньше тех же параметров для условий свободной поверхности моря. С другой стороны, высота нефтяной пленки на льду значительно (более чем в три раза) превышает высоту нефтяной пленки на открытой воде (на один и тот же момент времени от начала разлива). Поэтому технология выжигания нефти в ледовых условиях более эффективна, чем на открытой воде (необходима экспериментальная проверка данного вывода).

С использованием Методики 2 получены прогнозные значения следующих параметров процесса горения разлива нефти в ледовых усло-

виях: масса сгоревшей нефти составит 273 т; масса недожога – 122 т; коэффициент полноты сгорания – 0.7; масса газообразных поллютантов – 490 т; масса дисперсных поллютантов – 47 т; время горения нефти – 40 час.

**Заключение.** Апробация Методик 1 и 2 в Учениях 2023 года позволило оценить возможности данных методик по моделированию реальных процессов разлива нефти в ледовых условиях Российской Арктики. Методика 1 позволила определить (с принятием определенных дополнений, которые необходимо официально внести в Методику) площадь и толщину пленки разлитой нефти в ледовых условиях на различные моменты времени от начала разлива. В свою очередь, полученное значение площади разлива позволило с использованием Методики 2 определить эффективность метода выжигания разливов нефти в ледовых условиях, определить массы сгоревшей нефти и нефти, оставшейся на месте разлива после выжигания, определить время распространения пламени по разливу и время послыдного выгорания нефти, а также массы газообразных и дисперсных поллютантов, выброшенных в атмосферу в процессе горения разлива нефти.

В целом Методика 1 (с принятыми дополнениями) и Методика 2 показали свою работоспособность и эффективность в вопросах прогнозирования значений параметров разливов нефти в Арктических морях в ледовых условиях. Прогнозные значения, полученные при помощи данных Методик, могут быть полезными для поддержки принятия решений в аварийных ситуациях на МЛСП «Приразломная».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Johannessen B.O. and Jensen H. Experimental oil spills in the Barents Sea marginal ice zone // Proc. of POAC'93 Conference. V.2. Pp. 708-718.
2. Гузенко Р.Б. «Моделирование нефтяного загрязнения морских вод и льдов Арктики и оценка влияния нефтепродуктов на таяние и ледообразование», диссертация на соискание ученой степени кандидата географических наук, Санкт-Петербург, 2001.

УДК 536.4+539.3+539.4

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ПРИ ИНТЕНСИВНОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ**

К.Н. Ефимов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра физической и вычислительной механики механико-математического факультета  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: ekn@mail.tsu.ru

***Аннотация.** Выполнено численное моделирование поведения элемента тепловой защиты летательного аппарата. Данное тело подвергается воздействию интенсивных постоянной и переменной тепловых нагрузок вследствие аэродинамического нагрева со стороны набегающего высокоскоростного потока газа. В конструкции тепловой защиты применены различные виды конструкционных материалов. Выполнено исследование поведения этой системы в зависимости от применяемых материала и параметров набегающего аэродинамического потока.*

***Ключевые слова.** Тепловая защита, композиционные материалы, термодеструкция.*

## **MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL PROTECTION UNDER INTENSE THERMAL LOAD**

K.N. Efimov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: ekn@mail.tsu.ru

***Abstract.** Numerical modeling of the behavior of the thermal protection element of an aircraft has been performed. This body is exposed to intense constant and variable thermal loads due to aerodynamic heating from the oncoming high-speed gas flow. Various types of structural materials are used in the design of thermal protection. The behavior of this system was studied depending on the material used and the parameters of the oncoming aerodynamic flow.*

**Keywords.** *Thermal protection, composite materials, thermal destruction*

**Введение.** При движении с большими скоростями в атмосфере элементы летательных аппаратов могут подвергаться интенсивным динамическим и тепловым нагрузкам. Для предотвращения негативного воздействия этих факторов могут служить слои теплозащитного материала, силовые оболочки, слои тепловой изоляции. Все эти слои и оболочки могут быть выполнены из композиционных материалов. В данной работе рассматриваемая геометрия элемента летательного аппарата имеет вид конуса или цилиндра, которые со стороны набегающего потока переходят в сферическое затупление (рис. 1). Слой тепловой защиты из композитных материалов располагается во внешней к набегающему газовому потоку области поверх последовательно силовой оболочки и слоя тепловой изоляции.

**Постановка задачи.** Математически сформулированная физическая задача с учетом сделанных допущений сводится к решению следующей системы уравнений [1-2].

Твердая фаза (аморфная фаза армирующего наполнителя, полимерная фаза матрицы, пиролитическая фаза матрицы, газообразные продукты пиролиза в порах композита, кристаллическая фаза армирующего наполнителя) [1]:

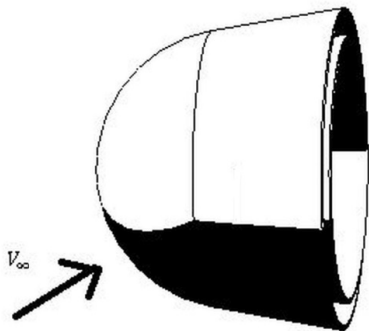
- скалярные уравнения неразрывности для всех фаз;
- векторные уравнения движения для всех фаз;
- скалярные уравнения движения для всех фаз;
- скалярные уравнения энтропии для всех фаз;
- векторные уравнения кинематики для всех фаз;
- тензорные уравнения совместности деформаций для всех фаз.
- закон Фурье;
- определяющие соотношения фаз композита;
- определяющие соотношения фаз для газовой фазы;
- выражение для внутренней энергии каждой фазы.

Внешняя газовая среда [2]: система уравнений пограничного слоя для химически равновесного воздуха.

**Результаты.** Рассматриваемое тело имеет вид конуса, затупленно-го с помощью сферического затупления. Численными методами проводилось исследование характеристик термомеханического взаимодействия элементов тепловой защиты летательного аппарата из композиционных материалов при аэродинамическом нагреве со стороны набегающего сверхзвукового потока. При исследованиях теплофизических свойств взаимодействия тепловой защиты и интенсивной тепловой нагрузки варьировались материалы матрицы на основе поли-

этиленовой, эпоксидной, фенольной, полиамидной, кремний-органической смол и материалы армирующего наполнителя: графитированное волокно, борное волокно, стекловолокно. Также рассматривались различные варианты аэродинамического нагрева элемента летательного аппарата.

**Заключение.** Установлены зависимости поведения теплофизических характеристик тепловой защиты элемента летательного аппарата от динамики аэродинамического нагрева, времени процесса и геометрических и физических характеристик рассматриваемых композитных материалов.



*Рис. 1. Схема взаимодействия потока воздуха и элемента летательного аппарата*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К., Минин В.В. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктурирующих конструкций // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013, вып.9. – С. 1–17. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html> (дата обращения: 25.04.2018)
2. Гришин А.М., Голованов А.Н., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Якимов А.С. Математическое моделирование тепловой защиты. – Томск: Издательство Томского университета, 2011. – 358 с.

УДК 532.5.031

## **ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ НАСАДОК, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ОТВЕРСТИЮ**

А.Х. Закиров

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
Узбекистан, г. Ташкент, Университетская, 4, 100174

E-mail: asqar\_z@mail.ru

***Аннотация.** Рассмотрено течение идеальной жидкости из сужающейся-расширяющейся насадки, прикрепленной к отверстию в вертикальной стенке. Формулируется математическая модель течения, в основу которой положены уравнения Эйлера для идеальной среды. Получена краевая задача для системы уравнений, описывающих стационарное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. С помощью методов теории аналитических функций получено решение поставленной задачи.*

***Ключевые слова.** Идеальная жидкость, насадка, интеграл Бернулли, конформное отображение, функция Н.Е.Жуковского, комплексный потенциал, комплексная скорость.*

**Введение.** Значительная часть задач истечения из сосудов решена Р. Мизесом, Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным и другими известными учеными [1–3]. В работе [4] приведены метод расчета действительных параметров газа при истечении из отверстий и сопел с различной конфигурацией сужающейся их части по известным из опыта коэффициентам расхода. Актуальность теоретического исследования жидкости из сосудов при отсутствии внешних сил и вихрей вызвана практическим приложением, где основными вопросами являются определение скорости истечения, формы струи и коэффициента истечения.

**Постановка задачи.** Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости из сужающихся-расширяющихся насадок, присоединенных к отверстию в вертикальной стенке. Предполагается, что массовые силы и поверхностные натяжения отсутствуют. Струя жидкости, выходящая из насадки, образует свободную поверхность с неизвестной границей. Давление на границе струи равно давлению в окружающем пространстве, т.е. постоянно.



Для определения плоского потока достаточно найти функцию скоростей  $\bar{V} = \frac{dW}{dz} = V_0 e^{-i\theta}$ , как функцию переменной  $W = \varphi + i\psi$ , где  $V_0$  – величина скорости и  $\theta$  – угол наклона скорости к оси  $x$ . Граница жидкости изображается линиями тока; поэтому в плоскости  $W = \varphi + i\psi$  потоку соответствует некоторая область, ограниченная прямолинейными разрезами, параллельными вещественной оси.

Используем метод Н.Е. Жуковского, для этого введем в рассмотрение аналитическую функцию [3]

$$\omega = \ln \frac{V_0}{\bar{V}} = \tau + i\theta,$$

где  $\tau = \ln \frac{V_0}{V}$ ,  $V_0$ - модуль скорости на свободной поверхности.

Область, занятую движущейся жидкостью, отобразим на верхнюю половину параметрической плоскости ( $\zeta = \xi + i\eta$ ). Таким образом, чтобы точкам А, Е, D, С, В, А соответствовали на плоскости ( $\zeta$ ) значения  $\zeta_E = -1$ ,  $\zeta_D = 1$ ,  $\zeta_C = c$ ,  $\zeta_B = b$ , а бесконечно удаленные точки на плоскостях  $z$  и  $\zeta$  переходили друг в друга.

Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции  $\omega(\zeta)$  и  $W(\zeta)$  выражаются через параметрическую переменную  $\zeta$ , изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции  $z(\zeta)$  можно искать функцию  $\omega(\zeta)$ .

На действительной оси верхней полуплоскости ( $\zeta$ ) функция  $\omega(\zeta)$  удовлетворяет следующим условиям:

при  $\eta = 0$ ,  $-\infty < \xi < -1$ ,  $Im \omega = 0$ .

при  $\eta = 0$ ,  $-1 < \xi < 1$ ,  $Re \omega = 0$ , на  $DE$  и  $D_1E_1$ .

при  $\eta = 0$ ,  $1 < \xi < c$ ,  $Im \omega = \alpha\pi$  на стенках насадки  $CD$  и  $C_1D_1$ ;

при  $\eta = 0$ ,  $c < \xi < b$ ,  $Im \omega = -\beta\pi$ , на стенках насадки  $BC$  и  $B_1C$ ;

при  $\eta = 0$ ,  $b < \xi < \infty$ ,  $Im \omega = -\frac{\pi}{2}$ , на  $DA$  и  $D_1A_1$ ;

Для того чтобы найти значение в точке  $\zeta$  гармонической в верхней полуплоскости функции  $\omega(\zeta)$ , принимающей заданные значения на оси, используем интегральную формулу Шварца для функции  $\omega(\zeta)$  в верхней плоскости [5] и находим выражение для функции  $\omega(\zeta)$ .

Находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = V_0 \left[ \frac{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{c-1}+\sqrt{c+1}\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}} \right]^{2(\beta+\alpha)} \left[ \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-b}} \right]^{1-2\beta} \frac{1}{i(\sqrt{\zeta-1}+\sqrt{\zeta+1})}$$

Разделяя действительную и мнимую части в (11), находим распределение скоростей на каждом отрезке границы верхней полуплоскости.

Отображение полосы шириной  $q$  на верхнюю полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  осуществляется аналитической функцией:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta + 1) + iq, \text{ где } q\text{- заданный расход жидкости.}$$

сти.

С помощью функций  $\frac{dW}{d\zeta}$  и  $\bar{V}(\zeta)$  в указанных областях можно найти все геометрические характеристики области течения в физической плоскости ( $z$ ). Конформно отображающую функцию  $z = z(\zeta)$  находим из уравнения

$$dz = \frac{dW}{d\zeta} \left( \frac{dW}{d\zeta} \right)^{-1} d\zeta .$$

Разделим действительную и мнимую части в последнем выражении; для нахождения уравнения свободной поверхности в параметрической форме достаточно проинтегрировать выражения.

**Заключение.** Если поток дозвуковой, то, так же как в несжимаемой жидкости, поперечное сечение насадки с ростом скорости уменьшается, а с уменьшением скорости – увеличивается. Полученные выводы справедливы для произвольных установившихся движений идеальной жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. М.: Наука, 1976.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Под редакцией Г.Ю.Степанова. М.: Мир, 1964.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. -М.: Наука, 1979.
4. Лухтура Ф.И. К вопросу об установившемся режиме истечения газа из осесимметричных отверстий и сопел. Вестник Приазовского государственного технического университета. Серия: Технические науки, 2015, вып.30, том 1.
5. Лаврентьев М.А, Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

УДК 532.5.031

## **ИСТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ КОНИЧЕСКИХ НАСАДКОВ**

А.Х. Закиров, Л. Кулдибаева

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
Узбекистан, г. Ташкент, Университетская, 4, 100174

E-mail: asqar\_z@mail.ru

***Аннотация.** Рассматривается течение жидкости сужающихся-расширяющихся насадок, присоединенных к отверстию в вертикальной стенке. Получена краевая задача для системы уравнений, описывающих стационарное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. С помощью методов теории аналитических функций получено решение поставленной задачи.*

***Ключевые слова:** идеальная жидкость, насадка, интеграл Бернулли, свободная поверхность, конформное отображение, комплексный потенциал, комплексная скорость.*

Значительная часть задач истечения из сосудов решена Р. Мизесом, Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным и другими известными учеными. Г.Кирхгоф впервые решил задачи плоских потенциальных струйных течений несжимаемой жидкости. Вслед за его работой появилось много исследований, посвященных плоским струйным потенциальным течениям сжимаемой жидкости, в которых даны приближенные методы, основанные на нахождении решения в плоскости годографа скорости [1- 3].

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости из сужающихся-расширяющихся насадок, присоединенных к отверстию в вертикальной стенке. Предполагается, что массовые силы и поверхностные натяжения отсутствуют. Струя жидкости, выходящая из насадки, образует свободную поверхность с неизвестной границей. Давление на границе струи равно давлению в окружающем пространстве, т.е. постоянно. Из интеграла Бернулли следует, что на свободной границе величина скорости постоянна.

Для определения плоского потока достаточно найти функцию скоростей  $\bar{V} = \frac{dW}{dz} = V_0 e^{-i\theta}$ , как функцию переменной  $W = \varphi + i\psi$ , где  $V_0$  - величина скорости и  $\theta$  — угол наклона скорости к оси  $x$ . Граница

жидкости изображается линиями тока; поэтому в плоскости  $W = \varphi + i\psi$  потоку соответствует некоторая область, ограниченная прямолинейными разрезами, параллельными вещественной оси.

**Метод решения.** Используем метод Н.Е.Жуковского [3]. Для этого введем в рассмотрение аналитическую функцию  $\omega = \ln \frac{V_0}{V} = \tau + i\theta$ , где  $\tau = \ln \frac{V_0}{V}$ ,  $V_0$ - модуль скорости на свободной поверхности.

Область, занятую движущейся жидкостью, отобразим на верхнюю половину параметрической плоскости ( $\zeta = \xi + i\eta$ ). Таким образом, чтобы точкам А, Е, D, С, В, А соответствовали на плоскости ( $\zeta$ ) значения  $\zeta_E = -1$ ,  $\zeta_D = 1$ ,  $\zeta_C = c$ ,  $\zeta_B = b$ , а бесконечно удаленные точки на плоскостях  $z$  и  $\zeta$  переходили друг в друга. Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции  $\omega(\zeta)$  и  $W(\zeta)$  выражаются через параметрическую переменную  $\zeta$ , изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции  $z(\zeta)$  можно искать функцию  $\omega(\zeta)$ .

Пусть на действительной оси верхней полуплоскости ( $\zeta$ ) задана функция  $\omega(\zeta)$ . Для того чтобы найти значение в точке  $\zeta$  гармонической в верхней полуплоскости функции  $\omega(\zeta)$ , принимающей заданные значения на оси, используем интегральную формулу Шварца для верхней полуплоскости [4] и находим выражение для функции  $\omega(\zeta)$ :

$$\omega(\zeta) = \ln \left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}}{\sqrt{1+\zeta}\sqrt{c-1}+\sqrt{1+c}\sqrt{\zeta-1}} \right]^{2\alpha} \left[ \frac{\sqrt{\zeta-c}}{\sqrt{\zeta-b}} \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}\sqrt{\zeta+1}} \right]^{2\beta} \frac{\sqrt{b-\zeta}(\sqrt{\zeta-1}+\sqrt{\zeta+1})}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1}+\sqrt{\zeta+1}\sqrt{b-1}} \quad (1)$$

Из последнего выражения находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = V_0 \left[ \frac{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{c-1}+\sqrt{c+1}\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-c}} \right]^{2(\beta+\alpha)} \left[ \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta-b}} \right]^{1-2\beta} \frac{1}{i(\sqrt{\zeta-1}+\sqrt{\zeta+1})} \quad (2)$$

Разделяя действительную и мнимую части в (2), находим распределение скоростей на каждом отрезке границы верхней полуплоскости. Отображение полосы шириной  $q$  на верхнюю полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  осуществляется аналитической функцией:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta + 1) + iq, \quad (3)$$

где  $q$ - заданный расход жидкости.

С помощью функций  $\frac{dw}{d\zeta}$  и  $\bar{V}(\zeta)$  в указанных областях можно найти все геометрические характеристики области течения в физической плоскости ( $z$ ). Конформно отображающую функцию  $z = z(\zeta)$  находим из уравнения

$$dz = \frac{dw}{d\zeta} \left( \frac{dw}{dz} \right)^{-1} d\zeta, \text{ где } \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{q}{\pi} \frac{1}{\zeta+1}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1976.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Под редакцией Г.Ю.Степанова. М.: Мир, 1964.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. -М.: Наука, 1979.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

УДК 539.89

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КАЛЬЦИТА ПРИ УДАРНОВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ**

К.К. Маевский

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Россия, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15, 630090

E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

***Аннотация.** Представлены результаты по моделированию ударно-волнового нагружения кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ). Численное моделирование ударно-волнового нагружения кальцита выполнено по термодинамически равновесной модели. Построено уравнения состояния для двух фаз кальцита. Проведена верификация полученных результатов с данными полученными на основании экспериментов и расчетами других авторов в диапазоне значений давления от 1 до 1000 ГПа. Представленные результаты по кальциту дают основу для рассмотрения теоретического уравнения состояния в экстремальных условиях, где модельные расчеты в настоящее время демонстрируют значительное разнообразие.*

***Ключевые слова.** Уравнение состояния, ударная адиабата, термодинамическое равенство, кальцит*

## **NUMERICAL SIMULATION OF THERMODYNAMIC PARAMETERS OF CALCITE UNDER SHOCK WAVE LOADING**

K.K. Maevskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, SB RAS,  
Russia, Novosibirsk, Lavrentyev Avenue, 15, 630090

E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

***Abstract.** The results of modeling the shock-wave loading of calcite ( $\text{CaCO}_3$ ) are presented. Numerical simulation of shock-wave loading of calcite is carried out according to the thermodynamically equilibrium model. The equations of state for two phases of calcite are constructed. The verification of the results with the data obtained on the basis of experiments*

*and calculations by other authors was carried out in the range of pressure values from 1 to 1000 GPa. The presented calcite results provide basis for considering the theoretical equation of state under extreme conditions, where model calculations currently demonstrate a significant variety.*

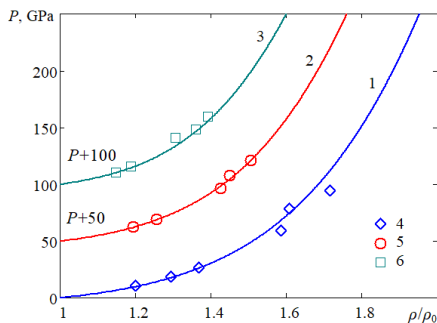
**Keyword.** *Equation of state, shock adiabatic, thermodynamic equality, calcite.*

**Введение.** Кальцит ( $\text{CaCO}_3$ ) известен как один из типичных минералов в осадочных породах на поверхностях Земли и других планет. Несмотря на то, что поведение кальцита при ударно-волновом нагружении важно для понимания реакций, вызванных высокоэнергетическим воздействием, таких как плавление, разложение и ионизация, экспериментальные исследования пока ограничены по значению давления. [1]. При скоростях столкновения метеоритов с Землей более 10 км/с ожидаются сжатия, соответствующие нагрузкам 200 ГПа и температурам более 5000 К [2]. Следовательно, уравнения состояния при более высоких давлениях также необходимы для численного моделирования образования кратеров при крупномасштабных ударных явлениях. В настоящей работе моделируется поведение кальцита до 1000 ГПа.

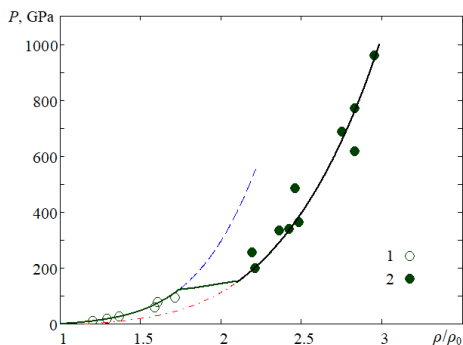
**Постановка задачи.** Расчет ударно-волнового нагружения кальцита как смеси фазы низкого и фазы высокого давления выполняется с помощью модели, которая основана на предположении, что компоненты смеси при ударно-волновом нагружении находятся в термодинамическом равновесии [3]. Для моделирования поведения конденсированных фаз используются уравнение состояния типа Ми-Грюнайзена. Выписываются условия динамической совместности на фронте волны в виде соотношений Рэнкина-Гюгонио, которые выражают условия сохранения массы, импульса и энергии. Условия сохранения потоков импульса и энергии выписывается для смеси в целом. Для потока массы условия сохранения выписывается для каждого компонента отдельно. Дополняя полученные выражения условием равенства значений температур компонентов и уравнениями состояния каждого компонента, находятся ударные адиабаты гетерогенного материала. В области фазового перехода компоненты исследуемого образца рассматриваются как смесь фазы низкого и фазы высокого давления. При таком подходе используемая модель позволяет достоверно описывать область полиморфного фазового перехода [4].

**Результаты.** На рисунке рис. 1. представлены результаты моделирования для образцов кальцита имеющих различные значения плотности в диапазоне давлений до 100 ГПа, для наглядности расчеты приве-

дены со сдвигом. Так же показаны данные [5], полученные на основании экспериментов для исследуемых образцов. На рисунке рис. 2 показаны расчеты для кальцита до значения давления 1000 ГПа с учетом полиморфного фазового перехода. Получено описание поведения образцов кальцита в пределах точности эксперимента.



*Рис. 1. Ударные адиабаты кальцита. Расчет:  $\rho_0 = 2,665 \text{ г/см}^3$  [1],  $\rho_0 = 2,020 \text{ г/см}^3$  [2],  $\rho_0 = 1,705 \text{ г/см}^3$  [3]. Данные 4,5,6 [5].*



*Рис. 2. Ударная адиабата кальцита. Расчет с учетом фазового перехода сплошная линия, пунктирная линия фаза низкого давления, штрихпунктирная фаза высокого давления. Данные 1[5], 2[1].*

**Заключение.** Выполнено моделирование для кальцита в диапазоне значений давления до 1000 ГПа. Рассматриваемая методика может быть полезна при расчетах для аналогичных сложных по составу материалов.



*Работа выполнена в рамках государственного задания ИГиЛ  
СО РАН, FWGG–2021–0006–2.3.1.2.7.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Umeda Y., Fukui K., Sekine T., Guarguaglini M., Benuzzi-Mounaix A., Kamimura N., Katagiri K., Kodama R., Matsuoka T., Miyanishi K., Ravasio A., Sano T., Ozaki N. Hugoniot and released state of calcite above 200 GPa with implications for hypervelocity planetary impacts // – Icarus. – 2022. – V. 377. – P. 114901.
2. Sekine T., Ozaki N., Miyanishi K., Asaumi Y., Kimura T., Albertazzi B., Sato Y., Sakawa Y., Sano T., Sugita S., Matsui T., Kodama R., Shock compression response of forsterite above 250 GPa // Sci. Adv. – 2016. – V. 2., I. 8. – P. e1600157.
3. Маевский К.К. Численное исследование ударно-волнового нагружения металлических композитов на базе W и WC // Журнал технической физики. – 2021. – Т. 91., № 5. – С. 815-820с.
4. Маевский К. К. Силикаты магния при высоких динамических нагрузках // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2022. – № 79. – С. 111–119.
5. Калашников Н. Г., Павловский М. Н., Симаков Г. В., Трунин Р. Ф. Динамическая сжимаемость минералов группы кальцита // Изв. АН СССР. – 1973. – № 2. – С. 23–29.

УДК 551.510.3:533.6.011.5

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНЫХ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ**

Д.А. Маракасов, А.А. Сухарев, Р.Ш. Цвык

ФГБУН Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева  
Сибирского отделения РАН,  
Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: mda@iao.ru

***Аннотация.** Приводится анализ пространственного распределения средней плотности воздуха в сверхзвуковой струе из результатов лазерного просвечивания. Алгоритм восстановления средней плотности из поперечных относительно оси струи отклонений фронта просвечивающей волны протестирован в экспериментах на вертикальной струйной установке ИТПМ СО РАН. Проводится сопоставление результатов восстановления с известными из литературы данными контактных измерений и с результатами численного моделирования. Продемонстрирована хорошая чувствительность локальных наклонов волнового фронта к колебаниям плотности воздуха, что открывает возможности экспериментального исследования их пространственной структуры в канале сверхзвуковых струй.*

***Ключевые слова:** сверхзвуковая струя, лазерное просвечивание, искажения волнового фронта, плотность воздуха, восстановление.*

## **INVESTIGATION OF THE STRUCTURE OF TURBULENT UNDEREXPANDED SUPERSONIC JETS BY LASER TRANSILLUMINATION**

D.A. Marakasov, A.A. Sukharev, R.Sh. Tsvyk

V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS  
Russia, Tomsk, Academician Zuev sq., 1, 634055

E-mail: mda@iao.ru

**Abstract.** *Analysis of the spatial distribution of the average air density in a supersonic jet based on the results of laser transillumination is performed. The algorithm for recovering the average density from deviations of the translucent wave front transverse with respect to the jet axis was tested in experiments on a vertical jet facility at ITAM SB RAS. The reconstruction results are compared with the data of contact measurements known from the literature and with the results of numerical simulation. A good sensitivity of local wavefront slopes to variations of air density has been demonstrated, which opens up the possibility of an experimental study of their spatial structure in the channel of supersonic jets.*

**Keywords:** *supersonic jet, laser transillumination, wavefront distortions, air density, reconstruction.*

**Введение.** Широкие перспективы применения сверхзвуковых струй (СЗС) обуславливают необходимость углубленного исследования их структуры при различных режимах истечения. Возможность использования для изучения пространственной структуры СЗС метода просвечивания была показана в работе [1], где были зарегистрированы флуктуации интенсивности лазерного излучения на частотах дискретных акустических тонов с амплитудами, во много раз превышающими уровень фона, соответствующий широкополосной турбулентности. Перспективным для исследований является метод измерения искажений волнового фронта датчиками положения центра тяжести лазерного пучка, прошедшего через СЗС, предложенный в [2].

**Постановка задачи.** По результатам экспериментов, проведенных на Вертикальной струйной установке (ВСУ) ИТПМ СО РАН (Новосибирск), проводится восстановление полей средней плотности воздуха в недорасширенных СЗС при различных условиях истечения, которые сравниваются с известными из литературы результатами исследований.

Режим истечения характеризовался числом  $NPR = P_e/P_0$ , где  $P_e$  – давление в камере Эйфеля,  $P_0$  – давление в окружающем пространстве. Исследовались струи с  $NPR = 2, 3, 5$ , что соответствует сверхзвуковому режиму истечения. Осредненные по времени поля плотности, температуры и давления в струе близки к осевой симметрии. Пучок просвечивал струю и направлялся в приемную систему, включающую линейку с пятью отверстиями диаметром 2 мм, разнесенными по горизонтали, и пять позиционно чувствительных фотодетекторов.

Изменение плотности воздуха в струе относительно внешней среды приводит к флуктуациям и отклонению среднего волнового фронта в

пучке и, как следствие, к смещению выделенных диафрагмами пучков, которое регистрируется фотодетекторами.

### **Результаты**

На основе анализа искажений волнового фронта оптической волны, просвечивающей аксиально симметричный поток, продемонстрирована возможность восстановления радиальной зависимости средней плотности воздуха. Хорошо прослеживается ячеистая структура потока при  $NPR = 3,5$  и практически пропадает при  $NPR = 2$ , когда скорость течения лишь немного превосходит скорость звука. Положение и характерные размеры ячеек соответствуют результатам численного моделирования и измерений контактными и PIV методами.

**Заключение.** Результаты восстановления поля средней плотности хорошо соответствуют известным литературным данным и результатам численного моделирования. Локальные отклонения волнового фронта достаточно чувствительны и позволяют проводить качественный и количественный анализ структуры течения в канале сверхзвуковой струи.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00483, <https://rscf.ru/project/23-29-00483/>.*

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Marakasov D.A., Sazanovich V.M., Tsvyk R.Sh., Shesternin A.N. Investigation of turbulence in axisymmetric supersonic jet from the results of laser transillumination // AIP Conf. Proc. -2017. – V. 1893. – P. 030082–1 – 030082–4.
2. Маракасов Д.А., Банах В.А., Сухарев А.А. Восстановление пространственного распределения средней плотности воздуха в сверхзвуковой струе на основе результатов лазерного просвечивания // Оптика атмосферы и океана. – 2021. – Т. 34. № 2, – С. 101–106.

УДК 536.461 + 551.593.1

## **ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОГНЕННОГО СМЕРЧА МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ**

Д.А. Маракасов, Р.Ш. Цвык, А.Н. Шестернин

ФГБУН Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского  
отделения РАН,

Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: mda@iao.ru

***Аннотация.** Рассмотрены результаты экспериментальных исследований распространения через пламя модельного огненного смерча с применением расходящегося и коллимированного пучков. Расходящийся лазерный пучок, пройдя через пламя, направлялся на 5 диафрагм диаметром 2 мм, которые выделяли из волнового фронта 5 пучков. Их координаты которых измерялись 5-ю позиционно-чувствительными фотоприемниками с частотой регистрации до 20 кГц. В расходящемся коллимированном пучке 5 параллельных пучков выделялись до смерча. Анализировались средние отклонения лазерных пучков в факеле. Применяя разработанный алгоритм, выполнено восстановление распределение плотности и температуры среды в различных сечениях факела и за его пределами.*

***Ключевые слова:** модельный огненный смерч, лазерное просвечивание, искажения волнового фронта, плотность воздуха, температура, восстановление.*

## **INVESTIGATION OF THE MODEL OF A FIRE TORNADO BY THE METHOD OF LASER TRANSILLUMINATION**

D.A. Marakasov, R.Sh. Tsvyk, A.N. Shesternin

V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS

Russia, Tomsk, Academician Zuev sq., 1, 634055

E-mail: mda@iao.ru

***Abstract.** The results of experimental studies of propagation of optical radiation through the flame of a model fire tornado using divergent and collimated beams are considered. The divergent laser beam, passing through the*

flame, was directed to 5 diaphragms 2 mm in diameter, which separated 5 beams from the wave front. Their coordinates were measured by 5 position-sensitive photodetectors with a registration frequency of up to 20 kHz. In a divergent collimated beam, 5 parallel beams stood out before the tornado. The mean deviations of laser beams in the plume were analyzed. Using the developed algorithm, the distribution of the density and temperature of the medium in various sections of the flame and beyond it was reconstructed.

**Keywords:** model fire tornado, laser transillumination, wavefront distortions, air density, temperature, recovery.

**Введение.** Огненный смерч (ОС) – явление довольно редко реализующееся в природе. Ввиду того, что проведение натуральных экспериментов по генерации ОС очень дорого и требует соответствующих атмосферных ситуаций, мы используем лабораторную модель этого явления. В отличие от известных моделей огненного смерча (МОС), мы закручиваем внешний, относительно емкости с горючим, воздушный поток лопастями, размещенными за пределами и ниже емкости. Формирование внешнего потока стабилизирует и закручивает пламя, не ограничивая его сверху.

Возможность использования для исследования аксиально симметричных потоков газа метода просвечивания была показана в работе [2], где были зарегистрированы флуктуации интенсивности лазерного излучения на частотах дискретных акустических тонов с высоким разрешением по частоте. Данный доклад посвящен применению для исследования структуры МОС метода измерения локальных искажений волнового фронта просвечивающего лазерного пучка, разработанного и предложенного в [3].

**Постановка задачи.** По результатам экспериментов, проведенных на лабораторном стенде МОС, восстановить среднее поле плотности воздуха и температуры. Схема экспериментов по регистрации искажений направления расходящегося лазерного излучения под действием плотности в модельном смерче представлена на рис. 1.

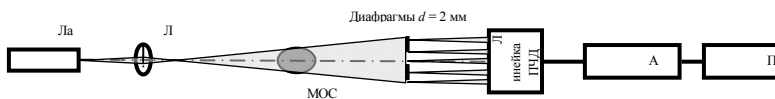


Рис. 1. Схема эксперимента, вид сверху

**Результаты.** Смещения лазерных пучков поперек оси МОС составляют несколько десятых мрад, вдоль оси – на порядок меньше. При расходящемся пучке структура отклонений направления поперек оси МОС включает три максимума по всей высоте смерча, которая замыкается по мере приближении к концу МОС по высоте и уменьшения скорости вращения. При параллельных зондирующих пучках отклонения в поперечном направлении линейно растут от центра к границе смерча, и стремятся к нулю за пределами смерча.

Результаты восстановления осредненной плотности воздуха дают уменьшение в ядре МОС до значений  $\sim 0.5$  кг/м<sup>3</sup>, что соответствует температурам  $\sim 800$  К. Полученные результаты хорошо согласуются с данными зондовых и тепловизионных измерений [1].

**Заключение.** Представленные результаты позволяют сделать вывод о пригодности метода лазерного просвечивания для экспериментальных исследований пространственной структуры МОС. Полученные оценки неплохо соответствуют известным экспериментальным данным, полученным другими способами, и теоретическим представлениям о газодинамических процессах, протекающих в ядре МОС.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00483, <https://rscf.ru/project/23-29-00483/>.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.М., Рейно В.В., Сазанович В.М., Цвык Р.Ш., Шерстобитов М.В. Некоторые итоги экспериментальных исследований огненных смерчей // Изв. ВУЗов. Физика. – 2011. – Т.54, № 9. – С. 14-24.
2. Marakasov D.A., Sazanovich V.M., Tsvyk R.Sh., Shesternin A.N. Investigation of turbulence in axysymmetric supersonic jet from the results of laser transillumination // AIP Conf. Proc. – 2017. – V. 1893. – P. 030082–1 – 030082–4.
3. Маракасов Д.А., Банах В.А., Сухарев А.А. Восстановление пространственного распределения средней плотности воздуха в сверхзвуковой струе на основе результатов лазерного просвечивания // Оптика атмосферы и океана. – 2021. – Т. 34, № 2, – С. 101–106.

УДК 621.928.37

## ТЕПЛООБМЕН В ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

П.С. Мартынов<sup>1</sup>, О.В. Матвиенко<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт оптики атмосферы имени В. Е. Зуева,  
Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>3</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет,  
Россия, г. Томск, пл. Соляная, 2, 634003

E-mail: matvolegv@mail.ru, marty Pavel@bk.ru

**Аннотация.** Представлены результаты исследований теплообмена закрученных потоках в каналах при низких числах Рейнольдса. Показано, что теплообмен в закрученном потоке зависит от интегральной интенсивности закрутки и от способа организации вращения. Установлено, что теплоотдача потока с постоянным углом закрутки выше, чем потока, закрученного по закону вращения твердого тела.

**Ключевые слова.** Теплообмен, закрученное течение, турбулентность.

**Введение.** Исследование теплообмена в закрученных потоках имеет особое значение для многих практических приложений [1]. Закрученные потоки могут формироваться с помощью вихревой лопатки или вихревого генератора, а также путем тангенциального ввода жидкости или газа в канал. Целью работы является численное исследование влияния способа закрутки потока на характеристики турбулентно-го теплообмена.

**Математическая модель.** Для описания поля течения жидкости в цилиндрическом канале используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\mu_{\text{eff}}}{C_{\text{тп}}} r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right] - \frac{\rho w w}{r}.$$



$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{\text{eff}} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu_{\text{eff}} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu_{\text{eff}} r \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - 2 \frac{\mu_{\text{eff}} v}{r^2} + \frac{\rho w^2}{r}.$$

Исследования характеристик турбулентности осуществлялось с использованием составной модели Ментера SST.

Для моделирования теплопереноса используется уравнение теплопроводности:

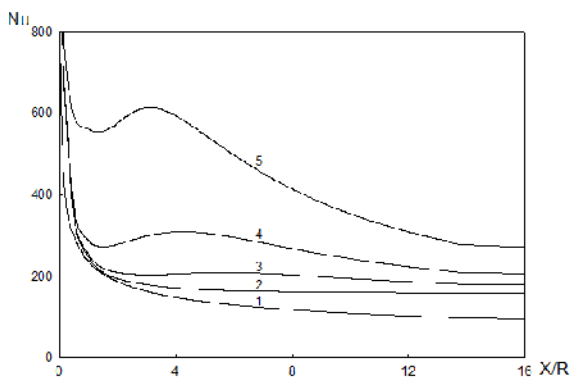
$$C_p \left( \frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + J_x \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[ r \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + J_r \right) \right].$$

В уравнении энергии  $J_x = -C_p \rho \langle u' T' \rangle$ ,  $J_r = -C_p \rho \langle v' T' \rangle$  – осевая и радиальная составляющие турбулентного теплового потока, которые определялись с использованием модели WET, разработанной Лаундером.

Закрутка потока на входе в канал моделировалась зависимостью  $w = u_{\text{in}} \text{Ro}(r/R)^n$ . Значение интегрального параметра закрутки на входе при данных граничных условиях можно определить как  $\Phi_{\text{in}} = 2 \text{Ro} / (n + 3)$ .

**Результаты.** На рис. 1 показано изменение  $Nu$  вниз по потоку при  $n = 0$ . На участке  $x/R < 10$  это изменение характеризуется наличием минимума и максимума с координатами  $x_{\text{min}}$  и  $x_{\text{max}}$ . На участке  $0 < x < x_{\text{min}}$  число Нуссельта пропорционально  $\text{Re}^{-1/3}$ , что соответствует ламинарному режиму течения. В области  $x_{\text{min}} < x < x_{\text{max}}$  число Нуссельта  $Nu$  пропорционально  $\text{Re}^{3/2}$ , а при  $x_{\text{max}} < x < 10R$  число Нуссельта  $Nu$  пропорционально  $\text{Re}^{0.8}$ , что позволяет говорить о турбулентном теплообмене. При  $x > 10R$  зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса определяется показателем степени 1/3, что свиде-

тельству о реламинаризации течения. С увеличением параметра  $n$  зависимость  $Nu(x)$  претерпевает ряд изменений. При  $n=1$  центробежные силы в ядре потока имеют нейтральный характер, и только в пристеночной зоне существует область их активного воздействия на течение жидкости. Дополнительная турбулизация течения жидкости не приводит к увеличению теплообмена в ней, и область перехода характеризуется наличием плато с постоянными значениями  $Nu$ . При  $n=2$  центробежные силы способствуют реламинаризации течения жидкости, что приводит к уменьшению теплообмена в ней по сравнению с течением при  $n=0$  и одном и том же значении  $\phi_{in}$ . При этом зависимость  $Nu(x)$  становится монотонной.



*Рис. 1. Изменение числа Нуссельта вниз по потоку при  $u_{in} = 2.2$  м/с,  $Re = 680$  и  $n = 0$ : 1 –  $\phi_{in} = 0$ ; 2 – 0.5; 3 – 1.2; 4 – 2.5; 5 – 8.5*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ушаков В. М., Матвиенко О. В. Численное исследование теплообмена и зажигания реакционноспособных стенок канала высокотемпературным потоком закрученного газа // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78, № 3. С. 123-128.

УДК 532.529

## **ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЯХ**

М.А. Пахомов, В.И. Терехов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
Россия, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1, 630090

E-mail: pakhomov@ngs.ru

***Аннотация.** Выполнено URANS моделирование турбулентной структуры течения и распространения дисперсной фазы в пузырьковой и газокапельной затопленных струях. Динамика дисперсной фазы рассматривается в рамках эйлерова двухжидкостного подхода.*

***Ключевые слова.** Газокапельная и пузырьковая газожидкостная затопленные струи, URANS, модель рейнольдсовых напряжений, эйлерово описание, турбулентность, распространение дисперсной фазы*

**Введение.** Двухфазные пузырьковые и газокапельные турбулентные затопленные струи широко применяются в энергетике, химической и фармацевтической промышленности и др. Например, процессы интенсификации массообмена между газовыми пузырьками и потоком жидкостью и транспортировка различных жидкостей с воздушными пузырьками в трубопроводах. Образование паровых пузырьков и их динамика в элементах гидравлического и энергетического оборудования. Распыливание жидкого топлива в форсунках ДВС или газовых турбин.

В настоящее время в литературе приведены результаты отдельных измерений и численных расчетов осредненных и турбулентных характеристик и концентрации дисперсной фазы в затопленных пузырьковых и газокапельных струях. Настоящая работа посвящена численному моделированию влияния числа Стокса (диаметра дисперсной фазы) и ее концентрации на турбулентную структуру течения и распространение дисперсной фазы в пузырьковых и газокапельных затопленных струй.

**Математическая модель.** С использованием системы осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса URANS, записанных с учетом влияния частиц на процессы переноса в несущей фазе, решает-

ся задача о динамике двухфазных пузырьковой и газокапельной затопленной струй [1]. Динамика двухфазного потока описывается с применением эйлера двухжидкостного подхода. Турбулентность несущей фазы описывалась с использованием эллиптической модели переноса компонент рейнольдсовых напряжений, записанной с учетом воздушных пузырьков или капель жидкости. Для расчета пульсаций компонент скорости дисперсной фазы применяются кинетические уравнения, приведенные в [1].

**Результаты моделирования и их анализ.** Для пузырьковой струи характерно наличие локального максимума в распределении концентрации для малых пузырьков (см. рис. 1). Число Стокса осредненного движения, представляющее собой отношение времени динамической релаксации  $\tau$  к характерному турбулентному макромасштабу  $\tau_j$ ,  $Stk = \tau/\tau_j$ . В качестве турбулентного макромасштаба принималось отношение радиуса трубы к среднemasсовой скорости на ее срезе  $\tau_f = R/U_{m1}$ . Для газокапельной струи получено, что первоначально с ростом осредненного числа Стокса (диаметра капель) наблюдается появление ярко выраженного максимума величины концентрации капель на оси струи для пузырьковой и газокапельной струй. Это объясняется повышением роли турбулентного миграционного переноса (силы турбофореза). Для случая дальнейшего роста числа Стокса дисперсной фазы наблюдается монотонное снижение концентрации дисперсной фазы для пузырьковой и газокапельной струй за счет увеличения роли турбулентной дисперсии.

**Заключение.** В работе выполнено численное моделирование изменения параметров несущей и дисперсной фазы по длине и сечению затопленной восходящей струи в зависимости от размера и концентрации частиц в широком диапазоне изменения отношения плотностей и диаметров дисперсной (воздушные пузырьки и капли воды) и несущей фаз (жидкость и воздух).

Моделирование газокапельной затопленной струи проведено при финансовой поддержке Мегагранта Министерства науки о образования РФ (номер гранта 75-15-2021-575). Исследование пузырьковой струи выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН по программе 121031800217-8.

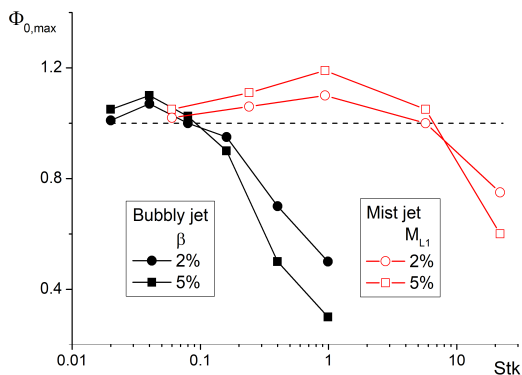


Рис. 1. Распределения объемной концентрации дисперсной фазы на оси в пузырьковой (черные линии) и газочапельной (красные линии) струях при вариации числа Стокса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. Eulerian-Eulerian modeling of the features of mean and fluctuational flow structure and the dispersed phase motion in the axisymmetric round two-phase jets // Mathematics. – 2023. – V. 11. – Paper 2533.

УДК 533.21

## **КОМБИНИРОВАННОЕ ТУШЕНИЕ ОЧАГА ГОРЕНИЯ РАСТИТЕЛЬНЫХ ГОРЮЧИХ МАТЕРИАЛОВ**

А.А. Старосельцева<sup>1</sup>, Е.Л. Лобода<sup>1,2</sup>, М.В. Агафонцев<sup>1,2</sup>,  
Д.Д. Базаров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup>Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН,  
Россия, г. Томск, площадь Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: loboda@mail.tsu.ru

***Аннотация.** В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований тушения очага горения растительных горючих материалов (РГМ) при воздействии ударных волн на процессы горения.*

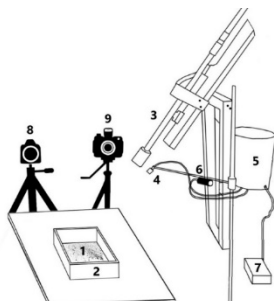
***Ключевые слова.** Природный пожар, ударная волна, пиролиз, детонация.*

**Введение.** Тушение пожаров при помощи воды или водяных растворов огнегасящих составов исследуется разными научными группами.

Очевидно, что ни традиционное тушение пожаров водой, ни тушение за счет воздействия ударных волн не дают желаемой эффективности. Большим преимуществом применения ударных волн для тушения пожара является то, что в результате детонации продуктов пиролиза [1] происходит прерывание процесса горения, а также ударная волна (УВ) обеспечивает срыв проводников горения [7].

**Постановка задачи.** Экспериментальная установка представлена на рис. 1.

Масса образцов РГМ составляла 50 г, влагосодержание образцов – 7-8%, расстояние от ударной волны до очага горения – 0,5 м, угол наклона ударной трубы – 53 градуса, средний расход волны при подаче форсунки – 58-62 г/с.



*Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – растительный горючий материал (хвоя сосны), 2 – кювета с адиабатическими стенками, 3 – ударная труба с расширяющимися насадками, 4 – форсунка, 5 – резервуар с водой, 6 – насос для воды, 7 – система управления для контроля подачи воды, 8 – ИК камера JADE J520SB, 9 – видеокамера.*

Температура элементов РГМ регистрировалась ИК камерой JADE J520SB в узком спектральном диапазоне 3.7-3.9 мкм, выбор которого обусловлен спектром излучения пламени, рекомендациями и достаточным диапазоном измеряемых температур 400-1100 К. Коэффициент излучения РГМ составлял 0.95. Скорость съемки составляла 25 кадров/с и выбиралась из необходимости длительной записи для регистрации изменения температуры.

В качестве критерия тушения очага горения выбиралось условие снижения температуры поверхности РГМ ниже температуры вспышки, которая для хвои сосны составляет около 810 К. Такой выбор критерия обусловлен тем, что реакция термического разложения эндотермическая и без внешнего источника тепла не может самоподдерживаться.

**Результаты.** Первая серия опытов была проведена без использования УВ в результате чего была определена масса воды, необходимая для тушения модельного очага горения. Следующая серия экспериментов проводилась при воздействии УВ и последующем охлаждении элементов РГМ водой. В таблице 1 представлены данные о времени и массе воды, необходимых для гарантированного тушения очага горения.

*Таблица 1  
Результаты тушения модельного очага горения.*

| Вид эксперимента   | Время тушения, с |             | Масса воды, г |            |
|--------------------|------------------|-------------|---------------|------------|
|                    | T=810 К          | T=503 К     | T=810 К       | T=503 К    |
| Без воздействия УВ | 5.4-5.6          | 12.68-12.92 | 4.77-5.97     | 11.2-13.78 |
| С воздействием УВ  | 4.0-4.5          | 6.2-6.44    | 3.53-4.8      | 5.69-6.87  |

При обработке результатов экспериментов было установлено, что снижение температуры поверхности элементов РГМ ниже температуры вспышки не гарантирует полное тушение, т.к. беспламенное горение может протекать при температуре 450-500 °С, которое в случае притока тепла извне (соседний очаг горения) или притока окислителя (действие ветра) может перейти в пламенный режим горения.

**Заключение.** В данной работе установлено, что в качестве критерия гарантированного тушения очага горения РГМ необходимо выбирать не снижение температуры поверхности РГМ ниже температуры вспышки, а снижение температуры РГМ ниже 503 К, когда прекращается тепловыделение в слое. Экспериментально показано, что применение УВ повышает эффективность тушения очага горения, проявляющееся в уменьшении времени орошения и массы воды, необходимой для гарантированного тушения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лобода, Е. Л. Детонационные процессы во фронте горения растительных горючих материалов / Е. Л. Лобода, М. В. Агафонцев, А. А. Старосельцева // Пожарная безопасность. – 2023. – № 1(110). – С. 27-34. – DOI 10.37657/vniipr.pb.2023.110.1.002.
2. Орлов О.К. Эластичные шнуровые заряды для борьбы с лесными пожарами / О.К. Орлов, Ю.В. Кустов // Лесные пожары и способы борьбы с ними. – Л. : ЛенНИИЛХ, 1986. – С. 102-108.



УДК 665.455:006.354

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ СИСКО**

Н.С. Фирсанова, О.В. Матвиенко

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: matvolegv@mail.ru, firnataliya@yandex.ru

***Аннотация.** Представлены результаты исследования течения закрученного потока псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале. Установлено, что при течении незакрученного потока в окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. Закрутка потока приводит к росту скоростей сдвиговых деформаций в приосевой части течения и уменьшению эффективной вязкости.*

***Ключевые слова.** реология, псевдопластическая жидкость Сиско, закрученное течение.*

### **Введение**

Развитие химических технологий делает актуальными задачи исследования закономерностей течения и теплообмена неньютоновских сред [1]. Одним из определяющих параметров при течении жидкостей, является вязкость, которая существенно влияет на структуру течения. Математическое моделирование течений реологически сложных сред существенно усложняется при наличии закрутки потока на входе в канал. Целью работы является исследование течения закрученного потока жидкости, описываемой реологической зависимостью Сиско, в цилиндрическом канале.

### **Математическая модель**

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\rho w^2}{r},$$

$$\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w r}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{\rho v w}{r}.$$

Для построения модели среды необходимо установить связь между диверторами тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Для неньютоновских сред реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид

$$\tau_{xx} = 2\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xr} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{rr} = 2\mu_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial r},$$

$$\tau_{x\varphi} = \mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{r\varphi} = \mu_{\text{eff}} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right), \quad \tau_{\varphi\varphi} = 2\mu_{\text{eff}} \frac{v}{r}.$$

$$U = \sqrt{2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2}.$$

Зависимость эффективной вязкости от температуры  $T$  и интенсивности сдвиговых напряжений определяется выбором реологической модели рассматриваемой среды.

Реологическая модель Сиско имеет вид:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_{\infty} + kU^{n-1}.$$

Параметр модели  $\mu_{\infty}$  в случае псевдопластических сред характеризует эффективную вязкость при бесконечной скорости сдвига. Параметр  $n$  характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее  $n$  отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Закрутка потока на входе в канал моделировалась зависимостью  $w = u_{\text{in}} \text{Ro} (r/R)$ .

**Результаты.** Рассмотрим особенности распределения эффективной вязкости при течении термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в канале (рис. 1). В прямоточном и слабозакрученных потоках радиальное распределение эффективной вязкости в периферийной и пристеночной областях является однородным и характеризуется относительно невысокими значениями. В окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости, обусловленный низкими значениями сдвиговых напряжений. С ростом закрутки потока сдвиговые напряжения в приосевой области возрастают. При умеренной закрутке потока это приводит к уменьшению значений эффективной вязкости в этой части течения и уменьшению максимума  $\mu_{\text{eff}}$ .

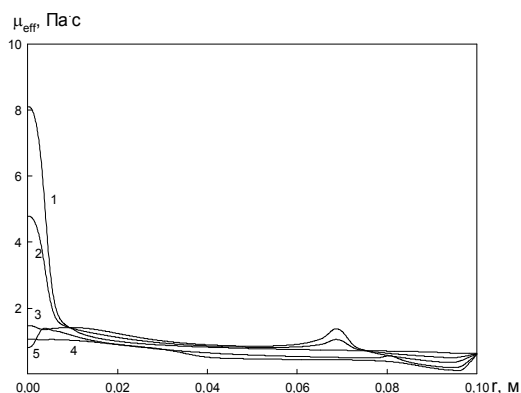


Рис. 1. Радиальное распределение эффективной вязкости:  $k = 0.5 \text{ Па} \cdot \text{с}^{0.5}$ ,  $\mu_{\infty} = 0.5 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $x = 1.6 \text{ м}$ ; 1 –  $Ro = 0$ , 2 – 3, 3 – 6, 4 – 9, 5 – 12.

**Закключение.** В результате анализа влияния теплообмена и реологических свойств среды на вращение потока можно сделать вывод, что с ростом значений числа Россби  $Ro$  в приосевой части течения происходит уменьшение значений эффективной вязкости  $\mu_{\text{eff}}$ , в результате роста скоростей сдвиговых деформаций в потоках с закруткой;

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матвиенко, О. В., Базуев В. П., Дульзон Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жид-

кости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал.  
2014. Т. 87, № 5. С. 1129-1137.

УДК 533.1, 533.7

## **НЕРАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ФУЛЛЕРЕНА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ**

А.С. Челнокова, А.М. Бубенчиков

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

***Аннотация.** В рамках подхода атом-атомных взаимодействий и с использованием теории сферических потенциалов рассматривается состояние гелий-ксенон-фуллереновой смеси в однородных условиях. Показано, что равновесное распределение Максвелла для гелия достигается за время 1 нс, для ксенона за 10 нс. При этом фуллереновая фракция демонстрирует отсутствие равновесия по распределению скоростей, так и по сближению трансляционной энергии с энергией вращения на всем расчетном интервале в 100 нс.*

***Ключевые слова.** молекулярная динамика, энергия газовых компонент, газовой-фуллереновая смесь.*

**Введение.** Наноструктуры на основе углерода, такие как фуллерены, привлекли широкое внимание исследователей по всему миру благодаря своим уникальным свойствам. В наномасштабе одним из устойчивых подходов к изучению пористых структур является молекулярно-динамическое (МД) моделирование. Оно особенно полезно для количественной оценки основных взаимодействий и динамических процессов. Данное исследование посвящено численному моделированию динамики фуллерен-газовой смеси в выделенном объеме.

**Постановка задачи.** Уравнения движения частиц газовой смеси построены с использованием методов молекулярной динамики. Однако фуллерены являются достаточно крупными молекулярными телами, поэтому при расчете их движения необходимо учитывать повороты этих тел. Будем определять повороты используя подходы классической механики, а именно из теоремы о моменте количества движения, как в подходе Эйлера. Однако предлагается отказаться от использования от углов Эйлера. Если в процессе расчетов будут определяться координаты всех центров сосредоточения сил и массы, то не нужно стремиться к упрощению тензора инерции. Все его компоненты могут

быть найдены по следующим формулам в каждый момент времени расчета:

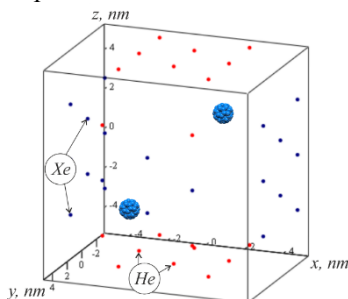
$$A = m \sum_{k=K+1}^L \left( (y_k - y_c)^2 + (z_k - z_c)^2 \right), \quad D = -m \sum_{k=K+1}^L (y_k - y_c)(z_k - z_c),$$

$$B = m \sum_{k=K+1}^L \left( (x_k - x_c)^2 + (z_k - z_c)^2 \right), \quad E = -m \sum_{k=K+1}^L (x_k - x_c)(z_k - z_c),$$

$$C = m \sum_{k=K+1}^L \left( (x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2 \right), \quad F = -m \sum_{k=K+1}^L (x_k - x_c)(y_k - y_c).$$

Все вычисления в этом случае сводится к нахождению проекции угловой скорости фуллера на оси абсолютного базиса из уравнений неразрешенных относительно этих проекций.

**Результаты.** В однородных условиях нет необходимости рассматривать весь заявленный объем, и в рассматриваемом случае выделенный представительный объем (рисунок 1) в виде куба с ребром 10 нм, позволяет рассматривать совсем небольшое количество перемещающихся газовых частиц (20 атомов гелия и 20 ксенона) и тем самым существенно сократить время вычислений.



*Рис. 1. Представительный объем газа: атомы гелия и ксенона (отмечены точками), 2 фуллера C<sub>60</sub>*

На рисунке 2 показана энергия поступательного перемещения фуллеренов, энергия их вращений, а также их средняя арифметическая величина. Эти энергии осреднены по ансамблю всех фуллеренов, а также по единичному временному интервалу в 1 нс. Как видно из рисунка крупные частицы (фуллерены) постоянно находятся в возмущенном состоянии, и можно говорить о равновесии лишь в глобальном смысле, т.е. о равенстве энергий на больших временах осреднения.

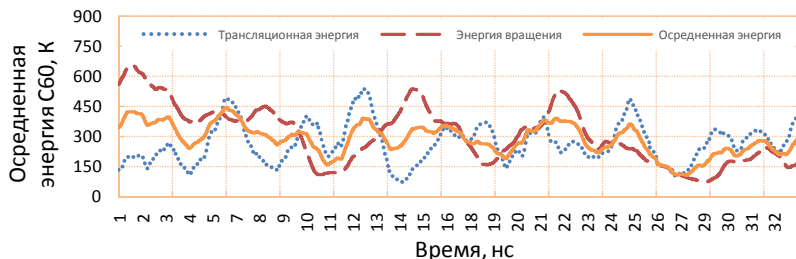


Рис. 2. Осредненная по предшествующему единичному интервалу времени энергия обоих фуллеренов

**Заключение.** Расчеты состояния смеси инертных составляющих с различной молекулярной массой показали, что равновесие в системах частиц определенного сорта устанавливается за различное время. Причем фракция фуллеренов находится в возмущенном состоянии в течение всего расчетного интервала. Энергия вращения фуллеренов существенно отличается от энергии их трансляционных движений и каждая из этих характеристик испытывает долгопериодические возмущения. При этом их среднеарифметическая величина приближается к энергии, отвечающей заданной температуре системы лишь на интервале осреднения существенно больше 100 нс.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943)*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО ЛАБОРАТОРНУЮ МОДЕЛЬ ОГНЕННОГО СМЕРЧА**

М.В. Шерстобитов, Р.Ш. Цвык

Институт оптики атмосферы имени В.Е. Зуева СО РАН  
Россия, г. Томск, пл. площадь Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: [shmike@iao.ru](mailto:shmike@iao.ru), [tsvyk@iao.ru](mailto:tsvyk@iao.ru)

***Аннотация.** Использовались данные из 2 серий экспериментов по физическому моделированию огненного смерча: 1- при взаимодействии винтообразно закрученного восходящего воздушного потока с пламенем этанола в неподвижной емкости на оси потока, 2- с вращающимся источником горения с закрепленным соосно цилиндрическим экраном. Для спектров мощности пульсаций лазерного пучка была подобрана аппроксимирующая кривая. Кривая служила основой для моделирования флуктуаций интенсивности лазерного пучка, распространяющегося через модель огненного смерча методом одномерного фазового экрана. Получено хорошее согласие модельных и экспериментальных данных.*

***Ключевые слова.** Огненный смерч, одномерный фазовый экран, лазерное просвечивание, флуктуации интенсивности.*

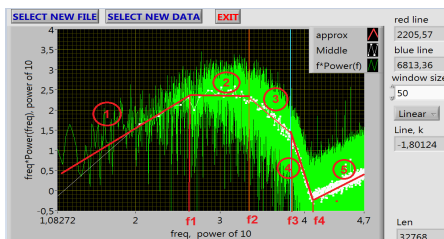
**Введение.** Выполнено численное моделирование зажигание уголка строительного материала набором «горячих» частиц. Задача рассматривается в декартовых координатах в трехмерной постановке. При обширных техногенных и природных пожарах, иногда возникают колоннообразные огненные вихри, высотойкратно большей, чем при обычном протекании горения. Такое явление по аналогии с атмосферным торнадо называется огненным смерчем (ОС). С 1950-х годов ведутся исследования ОС с помощью математических и физических моделей огненного смерча (МОС) [1]. Вопрос имитации огненного смерча с помощью факела пламени, образующегося при горении этанола в неподвижной емкости, установленной на оси восходящего закрученного воздушного потока, описан в нашей работе [4]. Наряду с упомянутым способом в литературе есть и другие, например, вращение цилиндрического экрана вокруг источника пламени (вращающегося совместно с экраном, либо неподвижного) [3]. Кроме того, представляет интерес численное моделирование флуктуаций интенсивности лазерного



пучка, пересекающего упомянутые 2 типа моделей. Таким образом, целью настоящего исследования было получить МОС для случая с вращающимся экраном, а также провести численное моделирование флуктуаций интенсивности лазерного пучка пересекающего эти 2 модели, включая случай свободного горения топлива без закрутки.

**Схема эксперимента и анализ результатов.** Для получения МОС при вращении экрана вокруг источника пламени первоначально была создана установка (малая) с цилиндрическим сетчатым проволочным экраном диаметром 9 см, источником горения диаметром 3 см. Такой площадки горения оказалось недостаточно для роста высоты пламени. При вращении сетки, наоборот, наблюдалось подавление высоты пламени. При создании следующей (средней) установки с экраном-сеткой диаметром 13,5 см, источника горения диаметром 7 см оказалось достаточно для возникновения МОС, подобного [3]. Дополнительно анализировались данные полученные ранее на установке с крыльчаткой [4]. Лазерное просвечивание проводилось для МОС установок со средней сеткой и крыльчаткой, а также для свободного горения топлива. Зондирующий расходящийся ЛП ( $\lambda=0,63$  мкм) просвечивал МОС. Излучение ЛП принималось на ФЭУ, перед которым устанавливалась диафрагма 0,1 мм. Сигналы с ФЭУ оцифровывались с частотой 100 кГц и записывались по  $10^6$  отсчетов. Рассчитывались спектры мощности флуктуаций интенсивности лазерного пучка по следующей формуле:  $u(f) = f * W(f)$ . Здесь  $W(f)$  - спектральная плотность сигнала БПФ от временной последовательности пульсаций интенсивности лазерного луча, а  $f$  - частота. Для численного моделирования предполагалось заменить такой спектр аппроксимационным. Простейшим способом, оказалось, разбить спектр на 5 интервалов (Рис.1) и, используя метод одномерного фазового экрана, подобно тому, как описано в [2], провести численное моделирование. Можно условно именовать каждый из интервалов: 1 - начальный участок, 2 - энергетический интервал, 3 - инерционный интервал, 4 - интервал диссипации кинетической энергии (вязкий интервал), 5 – шум (обусловлен шумом АЦП и пр.). Далее были рассчитаны частотные диапазоны и коэффициенты наклона всех 5 интервалов для всех проведенных экспериментов по лазерному просвечиванию МОС. В результате моделирования были получены последовательности флуктуаций интенсивности лазерного пучка для всех трех упомянутых серий экспериментов. Для проверки правильности моделирования в программе предусмотрено построение спектра мощности флуктуаций интенсивности. Такое сравнение спектров было

проведено для всех условий эксперимента. Во всех случаях наблюдалось согласие с экспериментальными данными.



*Рис. 1. Схема разбиения спектра на интервалы*

**Выводы.** В данной работе было установлено: 1- Смоделированные флуктуации интенсивности лазерного пучка дают спектр мощности подобный экспериментальному; 2- В смоделированном спектре мощности флуктуаций интенсивности лазерного пучка происходит «сглаживание» первоначально угловато заданного аппроксимационной кривой спектра

*Работа выполнена в рамках госзадания ИОА СО РАН.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ghodrat M., Shakeriaski F., Nelson D.J., Simeoni A.* Experimental and numerical analysis of formation and flame precession of fire whirls / A review M // Fire 4 (3), 43, 2021
2. *Белов В.В., А.Я., Фалиц А.В. и др.* Распространение оптических волн в неоднородных, случайных, нелинейных средах. – Томск: Издательство Институт оптики атмосферы СО РАН. 2012. - 402 с.
3. *Вялых Д.В., Дубинов А.Е и др.* Портативное твердотельное устройство с ручным приводом для генерации огненных вихрей // Приборы и техника эксперимента. 2013. №3. – С.109.
4. *Гришин А.М., Рейнов В.В., Сазанович В.М., Цык Р.Ш., Шерстобитов М.В.* Некоторые итоги экспериментальных исследований огненных смерчей // Изв. ВУЗов Физика. 2011. №12 С.14-23.

УДК 51-72; 539.421

## **ОСОБЕННОСТИ ЭВОЛЮЦИИ КОГЕЗИОННОЙ ЗОНЫ В ПРОЦЕССЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РОСТА ТРЕЩИН В ХРУПКИХ И КВАЗИХРУПКИХ МАТЕРИАЛАХ**

Е.В. Шилько<sup>1,2</sup>, А.С. Григорьев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
Россия, г. Томск, пр. Академический, 2/4, 634055

<sup>2</sup>Томский государственный университет, кафедра физики металлов  
физического факультета,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: shilko@ispms.ru

***Аннотация.** Скорость и режим роста трещин определяются сложными низкоуровневыми процессами в когезионной зоне, где происходит подготовка прироста трещины. В докладе представлены результаты численного изучения эволюции когезионной зоны в процессе динамического распространения трещин продольного сдвига в хрупких и квазихрупких материалах. Исследование проведено с использованием динамической модели разрушения, учитывающей конечное время инкубации локального разрушения. Результаты моделирования позволили выявить влияние инкубационного периода локального разрушения на скорость и режим роста трещин, а также на протяженность когезионной зоны.*

***Ключевые слова.** Хрупкое разрушение, Трещина продольного сдвига, Когезионная зона, Метод дискретных элементов.*

## **FEATURES OF THE EVOLUTION OF THE COHESIVE ZONE DURING THE DYNAMIC CRACK PROPAGATION IN BRITTLE AND QUASI-BRITTLE MATERIALS**

E.V. Shilko<sup>1,2</sup>, A.S. Grigoriev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS, Russia,  
Tomsk, 2/4, pr. Akademicheskii, 634055

<sup>2</sup>Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

**Abstract.** *The velocity and the mode of crack growth are determined by complex low-level processes in the cohesive zone, where crack growth is prepared. Here, we discuss the results of a numerical study of the evolution of the cohesive zone during the dynamic propagation of longitudinal shear cracks in brittle and quasi-brittle materials. The study was performed using a dynamic fracture model that takes into account the finite time of local fracture incubation. The simulation results made it possible to identify the influence of the time of local fracture incubation on the velocity and the mode of crack growth, as well as on the cohesive zone length.*

**Keywords.** *Brittle fracture, Longitudinal shear crack, Cohesive zone, Discrete element method.*

**Введение.** Хрупкие материалы склонны к динамическому разрушению путем динамического роста трещин. Характерная скорость и стабильность процесса роста трещины зависят не только от величины макроскопических упругих констант и прочности, но в еще большей степени от вязкости разрушения. Последняя контролируется особенностями его внутренней структуры. Повышение вязкости разрушения хрупких материалов может достигаться усложнением их внутренней структуры, в том числе включениями других фаз, связанной поровой структурой, микротрещинами с преимущественной ориентацией и т.д. Динамика роста трещины определяется процессами инкубации разрушения в узкой фронтальной области, называемой когезионной зоной. Понимание закономерностей эволюции этой области позволяет прогнозировать режим распространения трещины, анализировать влияние внутренней структуры материала и в конечном итоге – управлять разрушением. Настоящая работа посвящена теоретическому изучению особенностей изменения протяженности и напряженного состояния когезионной зоны в процессе роста трещин продольного сдвига в хрупких и квазихрупких материалах.

**Постановка задачи.** Моделировался процесс распространения трещины продольного сдвига в модельных материалах, характеризующихся одинаковыми значениями упругих констант и статической прочности, но различными значениями времени инкубации разрушения (последнее напрямую связано с вязкостью разрушения). Отметим, что увеличение инкубационного времени разрушения эффективно характеризует усложнение внутренней (например, дефектной) структуры. Исследование проводилось путем компьютерного моделирования методом дискретных элементов с использованием модели динамического разрушения хрупких материалов, которая базируется на принципах структурно-кинетической (физической) теории прочности. Анали-

зировалось влияние времени инкубации разрушения на динамику роста трещины, длину и напряженное состояние когезионной зоны.

**Результаты.** Установлено, что среднее значение длины когезионной зоны и динамика ее изменения в процессе динамического роста трещины однозначно определяются величиной времени инкубации локального разрушения. При относительно небольших значениях времени инкубации скорость распространения трещины сравнима со скоростью волны Рэлея, а размер когезионной зоны мал и в процессе распространения трещины претерпевает периодические колебания. Данный случай соответствует хрупким материалам с однородной низкодефектной структурой или высокопрочным интерфейсам, включая «залеченные» разломные зоны в земной коре. Увеличение времени инкубации приводит, как к замедлению роста трещины, так и к увеличению среднего значения протяженности когезионной зоны. При этом режим колебаний длины когезионной зоны претерпевает качественное изменение от регулярного (периодического) к нерегулярному (стохастическому). Последнее объясняет неустойчивый характер динамического распространения медленных трещин. Медленный неустойчивый (в том числе прерывистый) рост трещин характерен для квазихрупких материалов с сильно неоднородной структурой, в том числе со специально созданной слоистой структурой или специально организованным ансамблем несплошностей низкого масштаба.

**Заключение.** Таким образом, временной (время инкубации локального разрушения), а не пространственный (когезионная зона) параметр является физическим структурно-зависимым параметром, определяющим динамику разрушения хрупких материалов и в конечном итоге – вязкость разрушения. Следует отметить, что величина времени инкубации разрушения однозначно определяется на основе стандартных динамических механических испытаний. Это делает перспективным использование динамических механических моделей для детального описания развития разрушения в материалах со сложной микроструктурой (включая формирование и развитие когезионной зоны перед вершиной растущей трещины).

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ  
СО РАН, тема FWRW-2021-0002.*



**Секция 7**  
**Теория вероятностей**  
**и математическая статистика**

УДК 519.2

## **БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИРОДНОГО ХАРАКТЕРА**

В.А. Акимов, М.В. Бедило, Е.О. Иванова

Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам  
гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России  
(ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) МЧС России),  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, 7, 121352

E-mail: akimov@vniigochs.ru

***Аннотация.** В докладе представлены аналитические модели с использованием метода Байеса прогнозирования чрезвычайных ситуаций природного характера, а именно: теоретико-вероятностные модели прогнозирования лесных пожаров, последствий землетрясений и наводнений вследствие паводков.*

***Ключевые слова.** Байесовские модели, чрезвычайные ситуации природного характера, лесные пожары, землетрясения, наводнения.*

## **BAYESIAN MODELS FOR FORECASTING NATURAL EMERGENCIES**

V.A. Akimov, M.V. Bedilo, E.O. Ivanova

All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergency Situations  
of the Ministry of Emergency Situations of Russia,

***Annotation.** The report presents analytical models using the Bayesian method for predicting natural emergencies, namely: probabilistic models for predicting forest fires, the consequences of earthquakes and floods.*

***Keywords.** Bayesian models, natural disasters, forest fires, earthquakes.*

**Введение.** В данной статье выполнено моделирование с использованием метода Байеса основных параметров чрезвычайных ситуаций природного характера, вызванных лесными пожарами, землетрясениями и наводнениями.

**Постановка задачи.** На основе байесовских моделей спрогнозировать параметры чрезвычайных ситуаций природного характера, источ-



никами которых являются лесные пожары, землетрясения и наводнения [1].

**Результат 1.** Основными параметрами лесного пожара (ЛП) являются площадь и скорость ЛП [2]. Прогнозируемая площадь верхового ЛП ( $S_{ЛП}$ , га) определяется по формуле:

$$S_{ЛП} = S_{ЛП}^{расч} (100 + (-)D)/100,$$

где:  $S_{ЛП}^{расч}$  — расчетное значение площади ЛП, га;  $D$  — отклонение, %, соответствующее гипотезе, имеющей максимальную вероятность.

Расчет средней скорости фронта верхового ЛП осуществляется по формуле:

$$v_{фрсп}^j = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} v_{фрi}}{N_j},$$

где:  $j$  — диапазон значений скорости ветра;  $N_j$  — количество верховых ЛП, ед.;  $v_{фрi}$  — скорость фронта  $i$ -ого верхового ЛП, м/мин.

Основные показатели распространения низовых ЛП рассчитываются по модели Ротермела.

**Результат 2.** В модели «Землетрясение» вероятностной оценке с использованием байесовского классификатора подлежат следующие параметры [3]: степень повреждения здания, количество людей в поврежденных зданиях.

**Результат 3.** В составе обучающего множества модели «Наводнение» наиболее значимыми показателями, характеризующими рекупункт, являются ее расчетные гидроморфологические параметры в паводкоопасный период [4].

**Заключение.** В данной статье на основе байесовских моделей спрогнозированы некоторые параметры чрезвычайных ситуаций природного характера, источниками которых являются лесные пожары, землетрясения или наводнения [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прогнозно-аналитические решения по природным, техногенным и биолого-социальным угрозам единой системы информационно-аналитического обеспечения безопасности среды жизнедеятельности и общественного порядка "Безопасный город" / В. А. Акимов, А. В. Мишурный, О. В. Якимюк [и др.]. – Москва: Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской

- обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2022. – 315 с. – ISBN 978-5-93970-278-2. – EDN MGXNYI.
2. Акимов, В. А. Крупные природные пожары как источники чрезвычайных ситуаций природного характера / В. А. Акимов, М. В. Бедило, Е. О. Иванова // Технологии гражданской безопасности. – 2022. – Т. 19, № 2(72). – С. 11-13. – DOI 10.54234/CST.19968493.2022.19.2.72.2.11. – ЭДН PGJCMG.
  3. Акимов, В. А. Опасные геофизические явления и процессы как источники чрезвычайных ситуаций природного характера: модель среднесрочного прогнозирования землетрясений / В. А. Акимов, М. В. Бедило, Е. О. Иванова // Технологии гражданской безопасности. – 2022. – Т. 19, № 1(71). – С. 20-23. – DOI 10.54234/CST.19968493.2022.19.1.71.4.20. – EDN QICTLF.
  4. Акимов, В. А. Опасные гидрологические явления и процессы как источники чрезвычайных ситуаций природного характера: вербальная модель / В. А. Акимов, М. В. Бедило, С. П. Сущев // Технологии гражданской безопасности. – 2021. – Т. 18, № 4(70). – С. 4-8. – DOI 10.54234/CST.19968493.2021.18.4.70.1.4. – EDN EVUUFA.
  5. Акимов, В. А. Научное прогнозирование чрезвычайных ситуаций природного характера / В. А. Акимов, Е. О. Иванова // Россия в XXI веке в условиях глобальных вызовов: проблемы управления рисками и обеспечения безопасности социально-экономических и социально-политических систем и природно-техногенных комплексов: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции, Москва, 26–27 апреля 2022 года / Российская академия наук, Международный независимый эколого-политологический университет, Государственный университет управления. Том Выпуск 1. – Москва: Государственный университет управления, 2022. – С. 114-119. – EDN FFDBHY.

УДК 519.2

## **БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ ТЕХНОГЕННОГО ХАРАКТЕРА**

В.А. АКИМОВ, Е.О. Иванова, Ю.А. Шишков

Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам  
гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России  
(ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) МЧС России),  
Россия, г. Москва, ул. Давыдовская, 7, 121352

E-mail: akimov@vniigochs.ru

***Аннотация.** В докладе представлены аналитические модели с использованием метода Байеса прогнозирования некоторых чрезвычайных ситуаций техногенного характера.*

***Ключевые слова.** Байесовские модели, чрезвычайные ситуации техногенного характера, отключение теплоснабжения, отключение электроснабжения, разлив нефти и нефтепродуктов, сброс жидких технологических отходов в гидросферу, выброс опасных химических веществ в окружающую среду.*

## **BAYESIAN MODELS FOR PREDICTION OF EMERGENCY SITUATIONS OF A MAN-CAUSED CHARACTER**

V.A. Akimov, E.O. Ivanova, Yu.A. Shishkov

All-Russian Research Institute for Civil Defense and Emergency Situations  
of the Ministry of Emergency Situations of Russia

***Annotation.** The report presents analytical models using the Bayesian method for predicting some emergency situations of a man-made nature.*

***Keywords.** Bayesian models, man-made emergencies, heat supply cuts, power supply cuts, oil and oil product spills, discharge of liquid technological waste into the hydrosphere, release of hazardous chemicals into the environment.*

**Введение.** В данной статье выполнено моделирование основных параметров некоторых чрезвычайных ситуаций техногенного характера.

**Постановка задачи.** На основе байесовских моделей спрогнозировать параметры чрезвычайных ситуаций техногенного характера, вызванных отключением теплоснабжения, отключением электроснабжения, разливом нефти и нефтепродуктов, сбросом жидких технологических отходов в гидросферу, выбросом опасных химических веществ в окружающую среду [1].

**Результат 1. Модель «Отключение теплоснабжения».** Основные расчетные зависимости определения показателей надежности теплоснабжения потребителя, присоединенного к тепловой сети системы теплоснабжения, представлены в [2].

**Результат 2. Модель «Отключение электроснабжения».** При авариях на электросетях важное значение приобретает своевременное выявление потребителей, последствия прекращения передачи электрической энергии которым несут наибольший ущерб жизнедеятельности населения [3].

**Результат 3. Модель «Разлив нефти и нефтепродуктов (РНН)».** Основными прогнозными параметрами РНН являются: прогнозируемая площадь РНН; прогнозируемая масса вылившейся нефти или нефтепродуктов [4].

**Результат 4. Модель «Сброс жидких технологических отходов (ЖТО) в гидросферу».** Оценке подлежит концентрация вещества, входящего в состав ЖТО [5].

**Результат 5. Модель «Выброс опасных химических веществ (ОХВ) в окружающую среду».** Вероятностной оценке подлежат следующие параметры: мощность выброса; концентрация ОХВ в месте размещения системы (поста) мониторинга [6].

**Заключение.** В данной статье спрогнозированы некоторые параметры чрезвычайных ситуаций техногенного характера, вызванных отключением теплоснабжения, отключением электроснабжения, разливом нефти и нефтепродуктов, сбросом жидких технологических отходов в гидросферу, выбросом опасных химических веществ в окружающую среду.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прогнозно-аналитические решения по природным, техногенным и биолого-социальным угрозам единой системы информационно-аналитического обеспечения безопасности среды жизнедеятельности и общественного порядка "Безопасный город" / В. А. Акимов, А. В. Мишурный, О. В. Якимюк [и др.]. – Москва: Всероссийский

- научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2022. – 315 с. – ISBN 978-5-93970-278-2. – EDN MGXNYI.
2. Иванова, Е. О. Аварии на системах теплоснабжения: вероятностная оценка развития последствий отказов на тепловой сети / Е. О. Иванова, А. В. Мишурный // Технологии гражданской безопасности. – 2022. – Т. 19, № 4(74). – С. 48-50. – EDN ZYZBAW.
  3. Акимов, В. А. Определение индекса приоритета восстановления электроснабжения / В. А. Акимов, Е. О. Иванова, Ю. А. Шишков // Применение математических методов к решению задач МЧС России: Сборник трудов секции № 14 XXXIII Международной научно-практической конференции, Химки, 01 марта 2023 года. – Химки: Академия гражданской защиты Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий имени генерал-лейтенанта Д.И. Михайлика, 2023. – С. 14-17. – EDN HXCFJH.
  4. Акимов, В. А. Математическая модель для прогнозирования последствий разлива нефти и нефтепродуктов / В. А. Акимов, Е. О. Иванова, А. В. Мишурный // Технологии гражданской безопасности. – 2023. – Т. 20, № 1(75). – С. 68-70. – EDN BGHOAH.
  5. Акимов, В. А. Математическая модель для прогнозирования последствий сброса жидких технологических отходов в гидросферу / В. А. Акимов, С. В. Колеганов, А. В. Мишурный // Технологии гражданской безопасности. – 2023. – Т. 20, № 1(75). – С. 71-73. – EDN BPEHQV.
  6. Акимов, В. А. Математическая модель для прогнозирования последствий выброса опасных химических веществ в окружающую среду / В. А. Акимов, Е. О. Иванова, С. В. Колеганов // Технологии гражданской безопасности. – 2023. – Т. 20, № 2(76). – С. 11-14. – EDN KOSQWT.

## **РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РАСЧЕТА КРИВЫХ ОФП НЕФТИ И ВОДЫ ДЛЯ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ЗАПАДНОЙ СИБИРИ**

В.Н. Губин<sup>1</sup>, С.А. Коротков<sup>2</sup>, А.Г. Скрипкин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра математического анализа и теории функций, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup> Филиал Московского государственного университета в г. Сарове

<sup>3</sup> АО «ТомскНИПИнефть»

E-mail: gv4121988@mail.ru, ikorrzzz@gmail.com,  
SkripkinAG@tomsknipi.ru

***Аннотация.** В процессе работы оценены параметры регрессионных моделей, которые используются в функциях Кори для аппроксимации кривых относительных фазовых проницаемостей по нефти и по воде.*

***Ключевые слова.** Относительная фазовая проницаемость, водонасыщенность, нефтенасыщенность, закон Дарси.*

## **REGRESSION ANALYSIS FOR THE CALCULATION OF OIL AND WATER RELATIVE PERMEABILITY CURVES FOR OIL FIELDS IN THE WESTERN SIBERIA**

V.N. Gubin<sup>1</sup>, S.A. Korotkov<sup>2</sup>, A.G. Skripkin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> National Research Tomsk State University,  
Russia, Tomsk, Lenin Ave., 30, 634050

<sup>2</sup> Branch of Moscow State University in Sarov

<sup>3</sup> TomskNIPIneft

E-mail: gv4121988@mail.ru, ikorrzzz@gmail.com,  
SkripkinAG@tomsknipi.ru

***Annotation.** In the course of the work, the parameters of regression models were estimated, which are used in Corey's functions to approximate the curves of relative phase permeabilities for oil and water.*

***Keywords.** Relative phase permeability, water saturation, oil saturation, Darcy's law.*

**Введение.** На основе реальных данных, полученных на одном из месторождений Западной Сибири были построены четыре регрессионные модели, три из которых – модели множественной линейной регрессии. Статистическими методами была выполнена проверка качества построенных регрессионных моделей.

**Постановка задачи.** В нефтегазовой отрасли имеется потребность измерять фазовые проницаемости по воде, нефти и газу для данного образца горной породы, чтобы оценить ее способность пропускать сквозь себя газ и флюиды.

В лабораторных условиях объектом испытания является единственный или составной образец породы в виде цилиндров диаметром 30 мм и длиной 30-45 мм, приготовленный из керна изучаемого пласта и ориентированный параллельно напластованию. Компоновка составного образца происходит таким образом, чтобы по направлению вытеснения нефти водой каждый последующий образец имел меньшую проницаемость.

Определение фазовых проницаемостей проводится при изменении соотношения воды и нефти в фильтрационном потоке от чистой нефти до чистой воды таким образом, чтобы суммарная объемная скорость фильтрации оставалась постоянной. Она выбирается, исходя из ожидаемых скоростей фильтрации при принятой системе разработки изучаемого объекта, но не должна превышать в пересчете на линейную 2 м/сут. Испытания проводят в шести режимах:

- При отсутствии воды в потоке;
- При 5 % содержания воды в потоке;
- При 25 % содержания воды в потоке;
- При 50 % содержания воды в потоке;
- При 75 % содержания воды в потоке;
- При 100 % содержания воды в потоке.

После каждого режима измеряют объемы вышедших из образца жидкостей и рассчитывают проницаемости по формуле Дарси:

$$k = \mu \frac{Q \cdot L}{\Delta P \cdot A},$$

где

$k$  - проницаемость пористой среды, м<sup>2</sup>;  
 $\mu$  - динамическая вязкость флюида, Па·с;  
 $\Delta P = P_1 - P_2$  - перепад давления, Па;  
 $L$  - длина образца пористой среды, м;  
 $A$  - площадь фильтрации, м<sup>2</sup>;

$Q$  – объемный расход флюида или газа,  $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$

Для аппроксимации кривых относительных фазовых проницаемостей по нефти и воде используются функции Кори, которые имеют вид:

$$K_{ro} = S_{on}^{N_o}, S_{on} = \frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wi} - S_{or}},$$
$$K_{rw} = K'_{rw} S_{wn}^{N_w}, S_{wn} = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}}.$$

где:

$S_w$  – водонасыщенность;

$S_{wi}$  – начальная водонасыщенность;

$S_{or}$  – остаточная нефтенасыщенность;

$S_{on}$  – нормализованная нефтенасыщенность;

$S_{wn}$  – нормализованная водонасыщенность;

$K_{ro}$  – относительная фазовая проницаемость по нефти;

$K_{rw}$  – относительная фазовая проницаемость по воде;

$K'_{rw}, N_o, N_w$  – неизвестные регрессионные параметры в функциях Кори.

**Результаты.** В результате использования линейных регрессионных моделей получены МНК-оценки для неизвестных параметров, построены аппроксимации для кривых относительных фазовых проницаемостей по нефти и воде, а также планируется построить модели зависимости между «дорогими» и «дешевыми» параметрами проведения эксперимента с использованием полученных в работе результатов.

**Заключение.** Полученные результаты планируется использовать на практике для построения моделей кривых относительной фазовой проницаемости для нефтяных месторождений Западной Сибири.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ржевский, В. В. Основы физики горных пород / В.В. Ржевский, Г.Я. Новик. - М.: Ленанд, 2015. - 368 с
2. Боровков А.А. Математическая статистика.– СПб.: Лань , 2016.– 703 с.



## **МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ**

С.Б. Кологривова, Е.А. Пчелинцев

Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: skologrivova@gmail.com

***Аннотация.** В данной работе рассматривается проблема оценки параметров семейства экспоненциальных распределений. Разработана минимаксная процедура оценивания, которая обобщает подход Джеймса-Стейна на более широкий класс распределений. Предлагаемая оценка доминирует классическую оценку максимального правдоподобия в смысле квадратического риска.*

***Ключевые слова.** Семейство экспоненциальных распределений, квадратический риск, оценка максимального правдоподобия, минимаксное оценивание.*

## **MINIMAX PARAMETER ESTIMATION FOR A FAMILY OF EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS**

S.B. Kologrivova, E.A. Pchelitsev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenina av., 30, 634050

E-mail: skologrivova@gmail.com

***Abstract.** We consider the problem of parameter estimation for family of exponential distributions. We develop a minimax estimation technique, that generalizes the James-Stein approach to a broader class of distributions. The proposed estimate dominates the classical maximum likelihood estimator under quadratic risk.*

***Keywords.** Family of exponential distributions, quadratic risk, maximum likelihood estimator, minimax estimation*

**Введение.** Известно, что существует множество различных методов оценивания неизвестных параметров. Например, оценка максимального правдоподобия (ММП) долгое время считалась лучшей в своем классе, однако Ч. Стейном в [2] было показано, что оценка

ММП не является оптимальной в своем классе при  $d \geq 3$ . Данный результат справедлив для случая оценивания среднего многомерного нормального распределения. Одним из первых вопросов улучшенного оценивания параметров экспоненциальных распределений занялся Хадсон [1]. В [3] была представлена модифицированная оценка типа Джеймса-Стейна для оценивания среднего в модели регрессии с условно-гауссовским шумом. Такая оценка доминирует оценку ММП при  $d \geq 2$ , когда преимущества оценки Джеймса-Стейна и модификации Хадсона проявляются только при  $d \geq 3$ .

Целью данной работы является построение минимаксной оценки для параметров экспоненциальных распределений.

**Постановка задачи.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_d)$  – вектор независимых случайных величин, распределение  $i$ -ой компоненты которого задается плотностью

$$f_{\theta_i}(x) = \exp\{\theta_i b(x) - \psi(\theta_i)\} k(x), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.1)$$

$b(x_i) = \int (a(x_i))^{-1} dx_i$ ,  $a, \psi, k$  – некоторые  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функции,

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  – вектор неизвестных параметров из компактного множества  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Задача – оценить вектор  $\theta$  по наблюдениям  $X$ .

Пусть  $\Delta(\theta)$  – разность среднеквадратических рисков оценки максимального правдоподобия

$$\delta_0 = X \quad (1.2)$$

и предлагаемой смещенной оценки

$$\delta^* = \delta_0 + g(X) \quad (1.3)$$

где  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая функция.

### Результаты.

**Теорема 1.** Пусть компоненты вектора  $X$  имеют плотности (1.1). Тогда для всех  $d \geq 2$  оценка (1.2) доминируется оценкой (1.3) с

$$g(X) = -\frac{c}{\sqrt{S}} b(X_i), \quad \text{где } S = \sum_{i=1}^d b^2(X), \quad \text{т.е. } \Delta(\theta) < 0 \text{ для всех}$$

$$0 < c < 2(d-1)a^*.$$

**Следствие 1.** Пусть вектор  $X \sim N(\theta, I)$ . Тогда для всех  $d \geq 2$

$$\text{а) } \Delta(\theta) = c^2 - 2c(d-1)E_{\theta} \frac{1}{\|X\|} < 0;$$

б) оценка (2.2) доминируется оценкой (2.3) с  $g(x) = -\frac{cx_i}{\|x\|}$  для всех

$$0 < c < 2(d-1)a^*, \quad a^* = (q^* + \sqrt{d})^{-1};$$

в) наибольший выигрыш достигается при  $c^* = (d-1)a^*$ .

Следствие 2. Пусть вектор  $X \sim \text{Gamma}(\mu, 1)$ . Тогда для всех  $d \geq 2$

а)  $\Delta(\theta) = c^2 - 2c(d-1)E_\theta \frac{1}{\|\ln X\|} < 0$ ,  $\ln X = (\ln X_1, \dots, \ln X_d)$ ;

б) оценка (2.2) доминируется оценкой (2.3) с  $g(x) = -\frac{c \ln x_i}{\|\ln x\|}$  для

всех  $0 < c < 2(d-1)a^*$ ,  $a^* = (md)^{-1/2}$ ;

в) наибольший выигрыш достигается при  $c^* = (d-1)a^*$ .

**Заключение.** В работе построена минимаксная оценка для параметров семейства экспоненциальных распределений, которая превосходит оценку максимального правдоподобия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hudson H. M. A natural identity for exponential families with application in multiparameter estimation // The annals of statistics.– 1978. – Vol. 6, No 3. – P. 473 – 484
2. Stein C. Inadmissibility of the usual estimator for the mean of the multivariate normal distribution // Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob – 1956. – P. 197 – 206
3. Пчелинцев Е. А. Процедура Джеймса-Стейна для условно-гауссовской регрессии // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 6 – 17

УДК 519.22

## СУПЕР-ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

Е.А. Пчелинцев, Н.И. Никифоров, С.М. Пергаменщиков

Томский государственный университет,  
Россия, Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: evgen-pch@yandex.ru

***Аннотация.** Рассматривается задача непараметрического оценивания для модели непрерывной регрессии с негауссовским шумом Леви малой интенсивности при условии, что наблюдения доступны только в дискретные моменты времени. Строится новая процедура оценивания, для которой показано, что скорость сходимости с точностью до логарифмического коэффициента равна параметрической, т.е. выполняется свойство супер-эффективности.*

В работе рассматриваем негауссовскую регрессионную модель Леви в непрерывном времени, введенную в [1], т.е.

$$dy_t = S(t)dt + \varepsilon d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где  $S(\cdot)$  - неслучайная неизвестная  $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  функция из пространства  $\mathcal{L}_2[0,1]$ ,  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  - ненаблюдаемый шум, определяемый процессом Леви и  $\varepsilon > 0$  - интенсивность шума. Мы изучаем задачу оценивания для этой модели в непараметрической постановке, т.е. предполагаем, что

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Здесь коэффициенты Фурье  $(\theta_j)_{j \geq 1}$  принадлежат эллипсу  $\Theta$  в  $\mathcal{L}_2[0,1]$ :

$$\Theta = \left\{ S \in \mathcal{L}_2[0,1] : \sum_{j=1}^{\infty} a_j \theta_j^2 \leq r \right\},$$

где  $a_j = e^{2\kappa j^\alpha}$  с фиксированными постоянными параметрами  $0 < \alpha < 1$  и  $\kappa > 0$ ;  $(\phi_j)_{j \geq 1}$  - ортонормированный базис в  $\mathcal{L}_2[0,1]$ . Относительно

шумового процесса  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  предполагаем, что он моделируется процессом Леви вида

$$\xi_t = \rho_1 w_t + \rho_2 z_t \text{ и } z_t = x^* (\mu - \tilde{\mu})_t,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – некоторые неизвестные мешающие параметры,  $(w_t)_{0 \leq t \leq 1}$  – винеровский процесс, “ $*$ ” обозначает стохастический интеграл по скомпенсированной мере скачков,  $\mu(ds dx)$  – мера скачков с детерминированным компенсатором  $\tilde{\mu}(ds dx) - ds\Pi(dx)$ ,  $\Pi(\cdot)$  – неизвестная мера Леви такая, что

$$\Pi(x^2) = 1 \text{ и } \Pi(x^4) < \infty,$$

с  $\Pi(|x|^m) = \int_{\square \setminus \{0\}} |z|^m \Pi(dz)$ . Обозначим через  $\mathcal{Q}$  – распределение про-

цесса  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$  и через  $\mathcal{Q}_\varepsilon^*$  – семейство таких распределений на пространстве Скорохода  $\mathbf{D}[0, 1]$ , для которых

$$0 < \zeta_* < \rho_1^2 \text{ и } \rho_1^2 + \rho_2^2 \leq \zeta^*,$$

где неизвестные границы  $0 < \zeta_* \leq \zeta^*$  могут быть функциями от  $\varepsilon$ , т.е.

$\zeta_* = \zeta_*(\varepsilon)$  и  $\zeta^* = \zeta^*(\varepsilon)$  такие, что для любого  $\delta > 0$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |\ln \varepsilon|^\delta \zeta_*(\varepsilon) > 0 \text{ и } \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |\ln \varepsilon|^{-\delta} \zeta^*(\varepsilon) < \infty.$$

Задача заключается в разработке эффективных методов оценивания функции регрессии  $S$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , на основе дискретных наблюдений

$$(y_{t_l})_{0 \leq l \leq n} \text{ и } t_l = \frac{l}{n},$$

где объем выборки  $n$  – есть функция от интенсивности  $\varepsilon$ , т.е.  $n = n_\varepsilon$

такая, что  $n_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для изучения качества оценки  $\hat{S}$  (т.е. любой измеримой функции от наблюдений  $(y_{t_l})_{0 \leq l \leq n}$ ), используем робастный риск

$$R_\varepsilon^*(\hat{S}, S) = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_\varepsilon^*} R_{\mathcal{Q}}(\hat{S}, S), \tag{1}$$

$$R_{\mathcal{Q}}(\hat{S}, S) := \mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \left\| \hat{S} - S \right\|^2 \text{ и } \|S\|^2 = \int_0^1 S^2(t) dt.$$

Мы рассматриваем задачу минимаксного оценивания, т.е. наша основная цель – минимизировать риск (1) по всем возможным процедурам оценивания  $\hat{S}$ , т.е.

$$\sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(\hat{S}, S) \rightarrow \min_S \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для этого воспользуемся точными нижними оценками, полученными в [1] для задач непараметрического оценивания на основе полных данных  $(y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ . Теперь, используя взвешенную оценку наименьших квадратов из [1], оценим функцию  $S$  как

$$S_\varepsilon^*(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_j \hat{\theta}_k \phi_k(t), \quad \gamma_j = (1 - e^{-\kappa(n^\alpha - j^\alpha)}) \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq n_*\}} \quad (2)$$

и

$$\hat{\theta}_k = \sum_{j=1}^n \phi_k(t_j) \Delta y_{t_j}, \quad n_* = \max \left\{ 1 \leq l \leq n : e^{2\kappa l^\alpha} g(l) \leq \varepsilon^{-2} r \right\},$$

где  $g(l) = \sum_{j=1}^{l-1} e^{-\kappa(l^\alpha - j^\alpha)} (1 - e^{-\kappa(l^\alpha - j^\alpha)})$ . Пусть  $\Xi_\varepsilon$  – множество всех оценок

$\hat{S}$ , измеримых относительно  $\sigma \{y_{t_j}, 0 \leq l \leq n\}$ .

**Теорема.** При некоторых технических условиях оценка (2) является асимптотически эффективной, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\hat{S} \in \Xi_\varepsilon} \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(\hat{S}, S)}{\sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(S_\varepsilon^*, S)} = 1$$

и более того

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_\varepsilon \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(S_\varepsilon^*, S) = \kappa^{-1/\alpha},$$

где скорость сходимости  $\nu_\varepsilon = \varepsilon^{\tilde{-2}} \left| \ln \varepsilon \right|^{\tilde{-1/\alpha}}$  и  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\zeta^*}$ .

С доказательством можно ознакомиться в [2].

*Исследование поддержано РФФ (проект № 22-21-00302).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pchelintsev, E.A., Pergamenschikov, S.M., Povzun, M.A. Efficient estimation methods for non- Gaussian regression models in continuous time // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2022, 74, 113 – 142.
2. Nikiforov, N.I., Pergamenschikov, S.M., Pchelintsev, E.A. Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2023, (подана).

УДК 519.2

## **УЛУЧШЕННОЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ДЛЯ ДИФFUЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ**

С.С. Перелевский, Е.А. Пчелинцев

Национальный исследовательский Томский  
государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [slavaperelevskiy@mail.ru](mailto:slavaperelevskiy@mail.ru)

***Аннотация.** В данной научной работе рассматривается непараметрическая задача оценивания диффузионного процесса по дискретным данным с неизвестными коэффициентами диффузии. Для этой задачи с помощью усеченных последовательных оценок мы строим новую улучшенную процедуру выбора модели. Показано, что данная процедура имеет более высокую среднеквадратическую точность.*

***Ключевые слова.** Диффузионный процесс, улучшенные оценки, робастный риск, процедура выбора модели.*

## **IMPROVED NONPARAMETRIC ESTIMATION FOR DIFFUSION MODEL FROM DISCRETE DATA**

S.S. Perelevskiy, E.A. Pchelintsev

National Research Tomsk State University

*In this scientific work, a nonparametric problem of estimating the diffusion process from discrete data with unknown diffusion coefficients is considered. For this problem, using truncated successive estimates, we construct a new improved model selection procedure. It is shown that this procedure has a higher root-mean-square accuracy.*

***Key words:** Diffusion process, improved estimates, robust risk, model selection procedure.*

**Введение.** Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  задано стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида

$$dy_t = S(y_t)dt + v(y_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где  $(W_t)_{t \geq 0}$  - стандартный скалярный винеровский процесс, начальное значение  $y_0$  - некоторая заданная константа,  $S(\cdot)$  - коэффициент сноса,  $v(\cdot)$  - неизвестный стохастический коэффициент диффузии. Применение диффузионных процессов (1) обусловлено тем, так эти процессы определяют скорость многих физико-химических, экономических и биологических процессов [1-4].

**Постановка задачи.** Задача - построить процедуру выбора модели для оценивания функции  $S$  по наблюдениям  $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq N}$ ,  $t_j = j\delta_T$ , где  $N = [T / \delta_T]$  - размер выборки, а параметр  $\delta_T \in (0,1)$  - некоторая функция от  $T$ . Введем обозначение  $[x]$  как целая часть  $x$ .

Качество оценивания функции  $S$  на отрезке  $[a,b]$ ,  $a < b$ , будем измерять среднеквадратическим риском

$$\mathfrak{R}_g(\hat{S}, S) := \mathbf{E}_g \|\hat{S} - S\|^2 \text{ и } \|S\|^2 = \int_a^b S^2(t) dt,$$

где  $\hat{S}$  - некоторая оценка (измеримая функция от наблюдений),  $\mathbf{E}_g$  - математическое ожидание относительно распределения наблюдений  $(y_{t_j})_{1 \leq j \leq N}$  при фиксированных функциях  $S$  и  $g = (S, g) \in \Theta$ , где  $\Theta, g$  - определены в [5]. Для решения указанной задачи, в работе разрабатывается метод, комбинируя последовательный подход из [6] и подход улучшенного оценивания, развитый в [7, 8]. Для этого, используя метод усеченного последовательного оценивания, перейдем от модели (1) к ее аппроксимации регрессионной моделью. В каждой точке  $z_k = a + k(b-a)/n$ ,  $k = \overline{1, n}$ , на  $[a, b]$ ,  $n = [\sqrt{T}(b-a)/4] - 1$ , определим последовательный план  $(\tau_k, \tilde{S}_k)$  из [9] с моментом остановки  $\tau_k$  и оценкой  $\tilde{S}_k$ . Тогда исходную задачу оценивания функции сноса в модели (1) по неполным наблюдениям можно свести к задаче оценивания той же функции в регрессионной модели следующего вида:

$$Y_k = S(z_k) + \eta_k + \sigma_k \xi_k, \quad Y_k = \tilde{S}(z_k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2)$$

где компоненты шума определены в [10].

**Результаты.** С целью повышения неасимптотического качества оценивания вместо классических оценок МНК для коэффициентов



Фурье, введенных в [6], определим следующие сжимающие оценки для  $1 \leq j \leq n$

$$\theta_{j,n}^* = (1 - g_n(j)) \hat{\theta}_{j,n}, \quad g_n(j) = c_n \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}} \quad (3)$$

$$c_n = \frac{(d-1)(b-a)\sigma_*}{n \left( \mathbf{r} + \sqrt{(b-a)d} \left( \sqrt{\eta_T^*} + \sqrt{\sigma^*} \right) \right)}, \quad \hat{\theta}_{j,n} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \phi_j(z_k),$$

где параметры оценки (3) определены в [11,12].

Введем взвешенные сжимающие оценки ступенчатого вида: для всех  $a \leq z \leq b$

$$S_\lambda^*(z) = \sum_{k=1}^n S_\lambda^*(z_k) \mathbf{1}_{\{z_{k-1} < z \leq z_k\}} \quad \text{и} \quad S_\lambda^*(z_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_{j,n}^* \phi_j(z_k), \quad (4)$$

где  $\lambda = (1, \dots, 1, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  - вектор весовых коэффициентов, первые  $d$  компонент которого равны 1, остальные убывают от 1 до 0. Чтобы изучить свойства оценки (4), определим эмпирический среднеквадратический риск оценки  $\hat{S}$  равенством

$$\mathfrak{R}_n(\hat{S}, S) = \mathbf{E}_g \left\| \hat{S} - S \right\|_n^2 := \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_g \left( \hat{S}(z_k) - S(z_k) \right)^2 \quad (5).$$

Обозначим разность рисков взвешенной оценки (4) и взвешенной оценки МНК из [6] как

$$\Delta_n := \mathfrak{R}_n(S_\lambda^*, S) - \mathfrak{R}_n(\hat{S}_\lambda, S).$$

**Теорема.** Пусть наблюдения описываются уравнением (2). Тогда для всех  $T$  таких, что  $d \geq 2$  и вектора  $\lambda = (1, \dots, 1, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  эмпирический риск оценки (4) удовлетворяет неравенству

$$\Delta_n \leq -c_n^2 + \sqrt{(b-a)d} \eta_T^* \cdot c_n.$$

**Заключение.** Предложенная процедура выбора модели позволяет улучшить неасимптотическое качество обработки данных. Построение процедуры основано на особом алгоритме сжатия. В этом случае дополнительная априорная информация и увеличение объема наблюдения по сравнению другими методами не требуется. Представленные теоретические результаты подтверждаются соответствующими экспериментальными данными, полученные в ходе моделирования. В результате что выигрыш в среднеквадратической точности значителен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen D.S., Murray J.D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population // *J. Math. Biology.* 1981. V. 12. P. 237–249.
2. Kutoyants Yu.A. *Statistical Inferences for Ergodic Diffusion Processes.* Berlin: Springer, 2003.
3. Karatzas I., Shreve S.E. *Methods of Mathematical Finance.* New York: Springer, 1998.
4. Ratcliff R. *Diffusion and Random Walk Processes* // In *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, 2001.
5. Galtchouk L.I., Pergamenshchikov S.M. Asymptotically efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // *Statistical Inference for Stochastic Processes.* 2006. V. 9. P. 1-16.
6. Galtchouk L., Pergamenshchikov S.M. Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models // *Statistical Inference for Stochastic Processes.* 2022. V. 25, № 1. P. 127–158.
7. Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С. Адаптивное оценивание в гетероскедастичной непараметрической регрессии // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* 2019. № 57. С. 38-52.
8. Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С. Адаптивное эффективное оценивание функции в гетероскедастичной регрессии // *Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2019. № 49. С. 73–81.
9. Galtchouk L.I., Pergamenshchikov S.M. Efficient pointwise estimation based on discrete data in ergodic nonparametric diffusions // *Bernoulli.* 2015. V. 21, № 4. P. 2569-2594.
10. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Adaptive Sequential Estimation for Ergodic Diffusion Processes in Quadratic Metric // *Journal of Nonparametric Statistics.* – 2011. – Vol. 23. – P. 255-285.
11. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data // *Stochastic Processes and their Applications.* 2015. № 125. P. 294–326.
12. Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S., Makarova I.A. Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки.* 2018. V. 160, № 2. P. 364-372.

UDK 517.984

## THE SPECTRAL PROPERTIES OF QUANTUM BILLIARDS

V.A. Pchelintsev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: va-pchelintsev@yandex.ru

**Abstract.** *We study spectral properties of two-dimensional quantum billiards with boundaries from a large class of domains. Our approach is based on an interplay between the conformal mapping theory and composition operators on Sobolev spaces.*

**Key words.** *Elliptic equation, quantum billiard, conformal mapping.*

The present work is devoted to lower estimates for the ground state energy of a conformal regular quantum billiard  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u_n = E_n u_n, \quad u_n|_{\partial\Omega} = 0,$$

where  $u_n(x, y)$  is the wave function,  $\hbar$  is the Planck constant,  $m$  is the mass of the particle and  $E_n$  is the energy of a particle in the billiard with the boundary  $\partial\Omega$ .  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  is the two-dimensional Laplace operator. In the following we will use  $\hbar^2/2m = 1$ .

Let  $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^2$  be simply connected domains with non-empty boundaries. Then by the Riemann Mapping Theorem there exists a conformal mapping  $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ . The conformal mapping theory is widely used in study quantum billiards, see, for example, [1].

A quantum billiard  $\Omega$  is called conformal  $\alpha$ -regular about a quantum billiard  $\Omega'$  if

$$\iint_{\Omega'} |\varphi'(u, v)|^\alpha dudv < +\infty$$

for some  $\alpha > 2$ , where  $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$  is a conformal mapping. The quantum billiard  $\Omega$  is conformal regular if it is an  $\alpha$ -regular for some  $\alpha > 2$ . The class of conformal regular quantum billiards includes, in particular, billiards with Lipschitz and fractal boundaries [2].

Our approach is based on the geometric theory of composition operators on Sobolev spaces [3] in the special case of operators generated by conformal mappings. On this way we have the following result.

**Theorem 1.** Let  $\Omega$  be a conformal  $\infty$ -regular quantum billiard about a quantum billiard  $\Omega'$ . Then

$$E_1(\Omega) \geq \frac{E_1(\Omega')}{\operatorname{ess\,sup}_{\Omega'} |\varphi'(u, v)|^2}, \quad (1)$$

where  $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  is a conformal mapping of  $\Omega'$  onto  $\Omega$ .

**Remark 1.** Explicit values of  $E_1(\Omega')$  are known only for several particular domains. For example:

- Rectangle  $a \times b$  :  $E_1 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$ ;
- Disc of the radius  $r$ :  $E_1 = \left( \frac{j_{0,1}}{r} \right)^2$ ,

where  $j_{0,1} \approx 2.4048$  is the first positive zero of the Bessel function  $J_0$ .

**Remark 2.** The estimate (1) in some subclass of billiards is better than the classical estimate based on the Rayleigh-Faber-Krahn inequality.

*The research was supported by RSF (Grand no. 23-21-00080).*

## REFERENCES

1. Amore, P. (2010) Spectroscopy of drums and quantum billiards: perturbative and nonperturbative results. *J. Math. Phys.*, vol. 51, no. 5, 35 p.
2. Burenkov, V.I., Gol'dshtein, V., Ukhlov, A. (2015). Conformal spectral stability for the Dirichlet–Laplacian. *Math. Nachr.*, vol. 288, no. 16, pp. 1822–1833.
3. Ukhlov, A. (1993) On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces. *Sib. Math. J.*, vol. 34, no. 1, pp. 165–171.

## Авторский указатель

|                          |               |                       |              |
|--------------------------|---------------|-----------------------|--------------|
| Абызов А.Н. ....         | 49            | Григорьев А.С. ....   | 89, 102, 259 |
| Агафонцев М.В. ....      | 117, 200, 246 | Гриншпон И.Э. ....    | 195          |
| Азин А.В. ....           | 62            | Гриншпон Я.С. ....    | 195          |
| Акимов В.А. ....         | 4, 264, 267   | Губин В.Н. ....       | 270          |
| Амзаракова А.В. ....     | 65            | Гурина Е.И. ....      | 136          |
| Андреев К.П. ....        | 89            | Данейко О.И. ....     | 215          |
| Арефьева Е.В. ....       | 69, 120       | Данилкин Е.А. ....    | 92, 111, 144 |
| Афанасьева А.А. ....     | 72            | Данчев П.В. ....      | 55           |
| Базаров Д.Д. ....        | 246           | Дель И.В. ....        | 95           |
| Барышев Е.М. ....        | 218           | Джафаров Р.Г. ....    | 99, 182      |
| Батурин А.П. ....        | 203           | Дмитриев А.И. ....    | 89, 102      |
| Бедило М.В. ....         | 4, 264        | Долгов А.А. ....      | 218          |
| Бельков А.В. ....        | 62            | Ефимов К.Н. ....      | 221          |
| Благовещенская Е.А. .... | 7             | Жуков А.П. ....       | 62           |
| Богданова С.Б. ....      | 76            | Забарина А.И. ....    | 25           |
| Болгов М.В. ....         | 120           | Заболотский А.В. .... | 89, 102      |
| Большагин А.Ю. ....      | 218           | Закиров А.Х. ....     | 218, 224     |
| Ботыгин И.А. ....        | 192           | Зверев В.Г. ....      | 105          |
| Бриков Е.С. ....         | 80            | Зиновьев С.В. ....    | 218          |
| Бубенчиков А.М. ....     | 253           | Зюзьков В.М. ....     | 13           |
| Бычин И.В. ....          | 83            | Иванова Е.О. ....     | 264, 2267    |
| Варламкин А.В. ....      | 147           | Калашникова Т.В. .... | 192          |
| Васильев А.В. ....       | 62            | Каратаева Е.А. ....   | 108          |
| Вахрамеев И.В. ....      | 207           | Кармуши М. ....       | 176          |
| Веснин А.Ю. ....         | 10            | Касымов Д.П. ....     | 117          |
| Галатенко А.В. ....      | 43            | Климонов И.А. ....    | 129          |
| Гвоздев Р.И. ....        | 20            | Козлов К.Л. ....      | 28           |
| Гладков С.О. ....        | 76, 210       | Кологривова С.Б. .... | 273          |
| Гольдин В.Д. ....        | 86            | Коротков С.А. ....    | 270          |
| Гореликов А.В. ....      | 83            | Кравцова О.В. ....    | 30           |
| Горская В.А. ....        | 162           | Кулдибаева Л. ....    | 227          |

|                         |               |                         |                         |
|-------------------------|---------------|-------------------------|-------------------------|
| Лазарев В.Р. ....       | 179           | Старосельцева А.А. .... | 200, 246                |
| Лещинский Д.В. ....     | 92, 111, 144  | Старченко А.В. ....     | 72, 92, 95,<br>111, 144 |
| Лобода Е.Л. ....        | 117, 200, 246 | Сухарев А.А. ....       | 234                     |
| Логинова В.С. ....      | 30            | Тапкин Д.Т. ....        | 49                      |
| Луценко А.В. ....       | 117           | Терехов В.И. ....       | 243                     |
| Маевский К.К. ....      | 230           | Тузов Ф.К. ....         | 218                     |
| Маракасов Д.А. ....     | 234, 237      | Филимонова В.С. ....    | 192                     |
| Мартынов П.С. ....      | 240           | Фирсанова Н.С. ....     | 249                     |
| Матвиенко О.В. ....     | 215, 240, 249 | Фомина Е.А. ....        | 25                      |
| Михайлов М.Д. ....      | 65            | Хасанов И.Р. ....       | 147                     |
| Мугаллимов М.М. ....    | 99            | Цвык Р.Ш. ....          | 234, 237, 256           |
| Нагибин Н.С. ....       | 210           | Челнокова А.С. ....     | 243                     |
| Никифоров Н.И. ....     | 276           | Чехлов А.Р. ....        | 55                      |
| Норбосамбуев Ц.Д. ....  | 33            | Чумаков Ю.А. ....       | 152                     |
| Нужин Я.Н. ....         | 37            | Шамина О.Б. ....        | 192                     |
| Олтян И.Ю. ....         | 4, 120        | Шерстобитов М.В. ....   | 256                     |
| Олтян Н.Н. ....         | 120           | Шестернин А.Н. ....     | 237                     |
| Панкратьев А.Е. ....    | 43            | Шилько Е.В. ....        | 89, 259                 |
| Пахомов М.А. ....       | 243           | Шишков Ю.А. ....        | 267                     |
| Пергаменчиков С.М. .... | 276           | Юмин К.В. ....          | 92                      |
| Перелевский С.С. ....   | 279           | Abrosimov N. ....       | 158                     |
| Пономарев С.В. ....     | 62            | Gubarev V. Yu. ....     | 23                      |
| Пучкова Н.Д. ....       | 165           | Khodzitskii A.F. ....   | 52                      |
| Пчелинцев Е.А. ....     | 276, 273, 279 | Litvinov V.L. ....      | 114                     |
| Рейно В.В. ....         | 200           | Litvinova K.V. ....     | 114                     |
| Румянцева С.В. ....     | 46            | Panasenko A.S. ....     | 40                      |
| Русских А.С. ....       | 123, 126      | Pchelintsev V.A. ....   | 283                     |
| Ряховский А.В. ....     | 83            | Sherstnev V.S. ....     | 58                      |
| Садыгов М.А. ....       | 182           | Sherstneva A.I. ....    | 58                      |
| Свешников В.М. ....     | 129           | Tashpulatov S.M. ....   | 186                     |
| Скрипкин А.Г. ....      | 270           | Yanushchik O.V. ....    | 58                      |
| Сомова П.А. ....        | 136           |                         |                         |
| Сорин Б.В. ....         | 171           |                         |                         |

## SUMMARY

This book presents the abstracts of Conference reports discussing a wide range of issues on the problems of mathematics and mechanics, as well as modern approaches and methods for solving fundamental and applied problems. The materials are grouped into the following sections: Algebra and Mathematical Logic; Computational Mathematics and Computer Modeling; Geometry and Topology; Substance, Complex and Functional Analysis; Issues of Teaching Mathematics, Mechanics and Computer Science; Contemporary Problems of Mechanics.

The book is of interest for a wide range of researchers, scientists, teachers, and students.

---

Издательство "STT" является лидером научного книгоиздания в Сибирском регионе, консультирует по вопросам защиты авторских прав, организации выпуска научной периодики и распространению научных книг и журналов в России и за рубежом. С 2014 года является официальным представителем британского издательства *Red Square Scientific*, специально ориентированного на российских авторов и российское научное содержание. Это облегчает российским ученым публикации за рубежом и делает их работы широко доступными для мирового научного сообщества.

Лучшие книги, выпущенные Издательством "STT", находятся в крупнейших библиотеках мира – National Library of Medicine (USA), The British Library (UK), Library of Congress (USA) и в The US Patent Bureau (USA), что обеспечивает их размещение в мировых базах данных.

---



Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина 15Б-1  
Тел.: (3822) 421-455  
E-mail: sttonline@mail.ru

МИР ЖДЕТ ВАШИ КНИГИ!

# Содержание

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

|  |    |
|--|----|
| Теоретико-вероятностные методы прогнозирования чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера<br><i>В.А. Акимов, М.В. Бедило, И.Ю. Олтян</i> ..... | 4  |
| Кольца эндоморфизмов абелевых групп без кручения: алгоритмы, прямые разложения, матричные представления, связь с теоремой Бэра–Капланского<br><i>Е.А. Благовещенская</i> .....     | 7  |
| Комбинаторика и геометрия многогранников в пространстве Лобачевского<br><i>А.Ю. Веснин</i> .....   | 10 |
| Эксперименты в теории чисел<br><i>В.М. Зюзьков</i> .....   | 13 |

## Секция 1

### АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

|  |    |
|--|----|
| Порождение группы $SL_6(Z + iZ)$ тремя инволюциями<br><i>Р.И. Гвоздев</i> .....        | 20 |
| Rota-Baxter operators on groups<br><i>В.Ю. Gubarev</i> .....                           | 23 |
| Свойства множества $Kp$ в конечных группах<br><i>А. И. Забарина, Е.А. Фомина</i> ..... | 25 |
| О метризуемости однородных пространств<br><i>К.Л. Козлов</i> .....                     | 28 |
| Конечные квазиполя Холла и их обобщения<br><i>О.В. Кравцова, В.С. Логинова</i> .....   | 30 |
| Кольца формальных матриц над кольцами вычетов<br><i>Ц.Д. Норбосамбуев</i> .....        | 33 |



|   |    |
|---|----|
| О замкнутости ковров аддитивных подгрупп, ассоциированных с группами Шевалле, над коммутативными кольцами<br><i>Я.Н. Нужин</i> .....                                  | 37 |
| On radicals of Novikov algebras<br><i>A.S. Panasenko</i> .....  | 40 |
| Функциональное задание конечных квазигрупп<br><i>А.Е. Панкратьев, А.В. Галатенко</i> .....  | 43 |
| Осциллирующая асимптотика туннелирования спектра квадратичного оператора на алгебре $SU(1,1)$<br><i>С.В. Румянцева</i> .....  | 46 |
| Представимость матриц над полем в виде суммы потентных элементов<br><i>Д.Т. Тапкин, А.Н. Абызов</i> .....   | 49 |
| Monomial Rota–Baxter operators of weight zero on $F_0[x,y]$<br><i>A.F. Khodzitskii</i> .....  | 52 |
| Абелевы группы с изоморфными сильно инвариантными подгруппами<br><i>А.Р. Чехлов, П.В. Данчев</i> .....  | 55 |
| On the question of correctness and servant correctness of homogeneous completely decomposable groups<br><i>A.I. Sherstneva, O.V. Yanushchik, V.S. Sherstnev</i> ..... | 58 |

## **Секция 2**

### **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

|   |    |
|---|----|
| Тепловое состояние спутника 1U CubeSat<br><i>А.В. Азин, А.В. Бельков, А.П. Жуков,<br/>С.В. Пономарев, А.В. Васильев</i> .....   | 62 |
| Применение капельного биофильтра при численном моделировании процесса самоочищения сточных вод в двумерном приближении<br><i>А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов</i> ..... | 65 |

|  |    |
|--|----|
| Применение метода редуцирования для решения задач регулирования режима грунтовых вод на исторических территориях<br><i>Е.В. Арефьева</i> .....   | 69 |
| Численное решение обратной задачи ЭИТ с использованием алгоритма Левенберга–Марквардта<br><i>А.А. Афанасьева, А.В. Старченко</i> .....   | 72 |
| Исследование траектории свободно падающего тела в неинерциальной системе отсчета<br><i>С.Б. Богданова, С.О. Гладков</i> .....  | 76 |
| Опыт использования вариантов аппроксимаций бинарной корреляционной функции для расчётов функционала свободной энергии простой жидкости<br><i>Е.С. Бриков</i> .....   | 80 |
| Численное исследование некоторых режимов гидромагнитного динамо во вращающемся сферическом слое<br><i>И.В. Бычин, А.В. Гореликов, А.В. Ряховский</i> .....   | 83 |
| Применение метода «Ромб» для расчета трехмерного распространения тепла в твердом теле при наличии фильтрации газа<br><i>В.Д. Гольдин</i> .....   | 86 |
| Численное исследование влияния параметров многомасштабной поровой структуры на механические свойства керамических огнеупоров на основе SiO <sub>2</sub><br><i>А.С. Григорьев, Е.В. Шилько, А.И. Дмитриев, А.В. Заболотский, К.П. Андреев</i> ..... | 89 |
| Параметризация растительности в микромасштабных моделях<br><i>Е.А. Данилкин, А.В. Старченко, Д.В. Лецинский, К.В. Юмин</i> .....   | 92 |
| Прогноз скорости ветра на основе искусственных нейронных сетей<br><i>И.В. Дель, А.В. Старченко</i> .....   | 95 |
| О стабилизации движения квадрокоптера по данным GPS<br><i>Р.Г. Джафаров, М.М. Муталлимов</i> .....   | 99 |

|   |     |
|---|-----|
| Численная оценка ресурса службы огнеупорных изделий<br><i>А.В. Заболотский, А.С. Григорьев, А.И. Дмитриев</i> .....   | 102 |
| Об одной специальной разностной схеме для решения жесткого<br>конвективно-диффузионного уравнения переноса<br><i>В.Г. Зверев</i> .....                                  | 105 |
| Численное моделирование распространения примеси от высотных<br>источников над городом при неблагоприятных<br>метеорологических условиях<br><i>Е.А. Каратаева</i> .....  | 108 |
| Построение параллельного алгоритма для микромасштабной<br>модели турбулентного течения в уличных каньонах<br><i>Д.В. Лецинский, Е.А. Данилкин, А.В. Старченко</i> ..... | 111 |
| Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving<br>boundaries, taking into account damping forces<br><i>V.L. Litvinov, K.V. Litvinova</i> .....      | 114 |
| О формировании индуцированной атмосферной турбулентности<br>при природных пожарах<br><i>А.В. Луценко, Е.Л. Лобода, М.В. Агафонцев, Д.П. Касымов</i> .....               | 117 |
| Моделирование зон вероятного затопления с использованием<br>ориентированных графов<br><i>И.Ю. Олтян, Е.В. Арефьева, М.В. Болгов, Н.Н. Олтян</i> .....                   | 120 |
| Аналитическая методика экспресс-оценки продуктивности<br>многозабойных скважин<br><i>А.С. Русских</i> .....   | 123 |
| Восстановление абсолютной проницаемости пласта<br>с помощью вейвлет-преобразований<br><i>А.С. Русских</i> .....   | 126 |
| Применение тайлинга при решении краевых задач<br>методом декомпозиции области<br><i>В.М. Свешиников, И.А. Климонов</i> .....  | 129 |
| Численное моделирование теплообмена в стеклопакетах<br><i>П.А. Сомова, Е.И. Гурина</i> .....  | 136 |

|  |     |
|--|-----|
| Численное моделирование влияния солнечного излучения<br>на перенос примеси в уличном каньоне<br><i>А.В. Старченко, Е.А. Данилкин, Д.В. Лецинский</i> ..... | 144 |
| Компьютерное моделирование теплообмена в кабельных<br>проходках при пожаре<br><i>И.Р. Хасанов, А.В. Варламкин</i> .....                                    | 147 |
| Моделирование синтеза композиционного материала<br>методами электронно-лучевой и лазерной наплавки<br><i>Ю.А. Чумаков</i> .....                            | 152 |

### **Секция 3**

#### **ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

|  |     |
|--|-----|
| Euclidean volumes of a cone manifolds are algebraic numbers<br><i>N. Abrosimov</i> .....                                       | 158 |
| О взаимных расположениях пары $M$ -коник и $M$ -кубики<br><i>В.А. Горская</i> .....  | 162 |
| Об одном классе взаимных расположений двух кривых степени 4<br><i>Н.Д. Пучкова</i> .....                                       | 165 |
| Roelcke-предкомпактность групп автоморфизмов “сложных”<br>однородных линейно упорядоченных множеств<br><i>Б.В. Сорин</i> ..... | 171 |

### **Секция 4**

#### **ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

|   |     |
|---|-----|
| Семейство отображений верхней полуплоскости на двуугольник<br>с разрезом под нулевым углом к границе<br><i>М. Кармуши</i> ..... | 176 |
| Непрерывные функционалы, не имеющие конечного носителя<br><i>В.Р. Лазарев</i> .....   | 179 |

|   |     |
|---|-----|
| О бисубдифференциалах выпуклых операторов<br><i>Р.Г. Джафаров, М.А. Садыгов</i> .....     | 182 |
| Two-magnon systems in the four-spin exchange Hamiltonian<br><i>S.M. Tashpulatov</i> ..... | 186 |

### **Секция 5**

#### **ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

|  |     |
|--|-----|
| К вопросу о сквозной цифровизации в образовательной программе<br>по направлению подготовки 27.03.05 Инноватика<br><i>И.А. Ботыгин, О.Б. Шамина, Т.В. Калашиникова,<br/>В.С. Филимонова</i> ..... | 192 |
| Особенности исследования функций и построения их графиков<br>без применения дифференциального исчисления<br><i>Я.С. Гриншпон, И.Э. Гриншпон</i> .....  | 195 |

### **Секция 6**

#### **СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ**

|   |     |
|---|-----|
| Влияние инфразвуковых колебаний на процесс горения метана<br><i>М.В. Агафонцев, А.А. Старосельцева,<br/>Е.Л. Лобода, В.В. Рейно</i> ..... | 200 |
| Определение линии вариации при построении начального<br>разброса траекторий<br><i>А.П. Батурин</i> .....                                  | 203 |
| Решение задачи о конвекции во вращающейся трубе<br>методом Фурье<br><i>И.В. Вахрамеев</i> .....   | 207 |
| О наименьшей силе сопротивления тел при их обтекании<br>ламинарным потоком вязкой жидкости<br><i>С.О. Гладков, Н.С. Нагибин</i> .....     | 210 |

|  |     |
|--|-----|
| Определение остаточных напряжений стенок трубы<br>из дисперсно-упрочненного алюминиевого сплава<br>после снятия внешнего и внутреннего давления<br><i>О.И. Данейко, О.В. Матвиенко</i> ..... | 215 |
| Оценка параметров разлива нефти в ледовых условиях<br>Печерского моря<br><i>А.А. Долгов, Е.М. Барышев, А.Ю. Большагин,<br/>С.В. Зиновьев, Ф.К. Тузов</i> .....                               | 218 |
| Математическое моделирование тепловой защиты<br>при интенсивной тепловой нагрузке<br><i>К.Н. Ефимов</i> .....  | 221 |
| Истечение жидкости из насадок, присоединенных к отверстию<br><i>А.Х. Закиров</i> .....   | 224 |
| Истечение идеальной жидкости из конических насадков<br><i>А.Х. Закиров, Л. Куддибаева</i> .....  | 227 |
| Численное моделирование термодинамических параметров<br>кальцита при ударноволновом нагружении<br><i>К.К. Маевский</i> .....   | 230 |
| Исследование структуры турбулентных недорасширенных<br>сверхзвуковых струй методом лазерного просвечивания<br><i>Д.А. Маракасов, А.А. Сухарев, Р.Ш. Цвык</i> .....                           | 234 |
| Исследование модели огненного смерча методом<br>лазерного просвечивания<br><i>Д.А. Маракасов, Р.Ш. Цвык, А.Н. Шестернин</i> .....  | 237 |
| Теплообмен в закрученных потоках при малых<br>числах Рейнольдса<br><i>П.С. Мартынов, О.В. Матвиенко</i> .....  | 240 |
| Турбулентная структура течения и распространение<br>дисперсной фазы в осесимметричных затопленных<br>двухфазных струях<br><i>М.А. Пахомов, В.И. Терехов</i> .....                            | 243 |

|   |     |
|---|-----|
| Комбинированное тушение очага горения<br>растительных горючих материалов<br><i>А.А. Старосельцева, Е.Л. Лобода,<br/>М.В. Агафонцев, Д.Д. Базаров</i> .....                  | 246 |
| Исследование течения закрученного потока<br>псевдопластической жидкости Сиско<br><i>Н.С. Фирсанова, О.В. Матвиенко</i> .....  | 249 |
| Неравновесное состояние фуллерена в двухкомпонентной<br>смеси газов<br><i>А.С. Челнокова, А.М. Бубенчиков</i> .....   | 253 |
| Математическое моделирование флуктуаций интенсивности<br>лазерного пучка, пересекающего лабораторную модель<br>огненного смерча<br><i>М.В. Шерстобитов, Р.Ш. Цвык</i> ..... | 256 |
| Особенности эволюции когезионной зоны в процессе<br>динамического роста трещин в хрупких<br>и квазихрупких материалах<br><i>Е.В. Шилько, А.С. Григорьев</i> .....           | 259 |

## **Секция 7**

### **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

|   |     |
|---|-----|
| Байесовские модели прогнозирования чрезвычайных<br>ситуаций природного характера<br><i>В.А. Акимов, М.В. Бедило, Е.О. Иванова</i> .....                         | 264 |
| Байесовские модели прогнозирования чрезвычайных<br>ситуаций техногенного характера<br><i>В.А. Акимов, Е.О. Иванова, Ю.А. Шишков</i> .....                       | 267 |
| Регрессионный анализ для расчета кривых ОФП нефти<br>и воды для нефтяных месторождений Западной Сибири<br><i>В.Н. Губин, С.А. Коротков, А.Г. Скрипкин</i> ..... | 270 |
| Минимаксное оценивание параметров экспоненциальных<br>распределений<br><i>С.Б. Кологривова, Е.А. Пчелинцев</i> .....  | 273 |

|  |     |
|--|-----|
| Супер-эффективное оценивание функции регрессии<br>по неполным данным<br><i>Е.А. Пчелинцев, Н.И. Никифоров,</i><br><i>С.М. Пергаменчиков,</i> ..... | 276 |
| Улучшенное непараметрическое оценивание<br>для диффузионной модели по неполным данным<br><i>С.С. Перелевский, Е.А. Пчелинцев</i> .....             | 279 |
| The spectral properties of quantum billiards<br><i>V.A. Pchelintsev</i> .....  | 283 |
| АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ .....  | 285 |
| SUMMARY .....  | 287 |





*Научное издание*

**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ**

**Посвящается 145-летию Томского государственного университета  
и 75-летию механико-математического факультета**

2–5 октября, 2023 г., г. Томск

*Опубликовано в авторской редакции*

Верстка, техническое редактирование,  
дизайн – С.В. Алексеев, Ю.А. Алексеева

Издательство “СТТ”

Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15Б–1

Тел.: (3822)421-455

E-mail: [sttonline@mail.ru](mailto:sttonline@mail.ru)



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Усл. печ. лист 17,2. Уч.-изд. л. 10,4.

Бумага SvetoCору. Печать цифровая. Гарнитура Times.

Подписано к печати 25.09.2023 г. Формат 60x84/16

Тираж 100 экз. Заказ № 701.